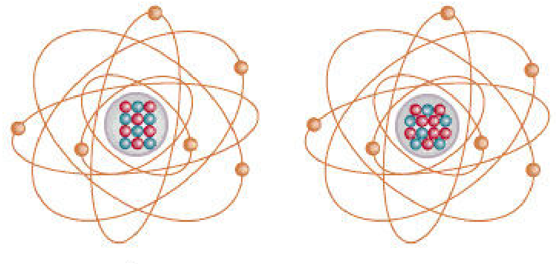
BOLETÍN DE MATEMÁTICAS DEL I.E.S. MATARRAÑA – Número 11 – NOVIEMBRE 2.009

CARBONO, FÓSILES Y LOGARITMOS

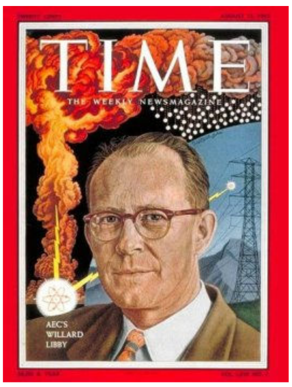
El carbono-14, ^{14}C, es un isótopo del carbono, descubierto en 1940 por Martin Kamen y Sam Ruben.



Carbono 12
estable

Carbono 14
inestable (radiactivo)

Su núcleo contiene 6 protones y 8 neutrones. En 1949 Willard Libby y su equipo de la Universidad de Chicago determinaron un valor para el periodo de semidesintegración de este isótopo de 5568 años. (El periodo de semidesintegración, es el tiempo necesario para que se desintegren la mitad de los núcleos de una muestra inicial de una sustancia radiactiva.) Determinaciones posteriores produjeron un valor de 5760 años. Debido a su presencia en todos los materiales orgánicos, el carbono-14 se emplea en la datación de restos orgánicos, tales como: huesos, madera, fibras vegetales que fueron creadas en un pasado relativamente reciente por actividades humanas.



En 1960, Willard Libby fue premiado con el Premio Nobel de Química por su método de datación mediante el carbono-14.

Se sabe que a los 5760 años de la muerte de un ser vivo la cantidad de C-14 en sus restos fósiles se ha reducido a la mitad. ¿Puede el lector determinar cuánto quedará tras 57.600 años?

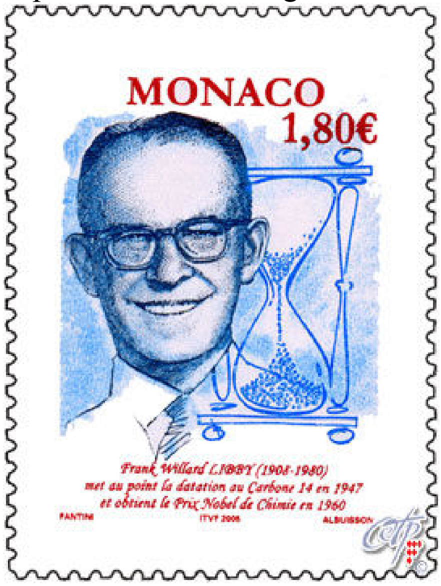
El método de datación por carbono-14 es la técnica basada en isótopos más fiable para conocer la edad de muestras orgánicas de menos de 60.000 años. El carbono-14 se produce continuamente en la atmósfera. Pero es inestable, por lo que se transforma espontáneamente en nitrógeno-14. Estos procesos de generación y degradación de Carbono-14 se encuentran prácticamente equilibrados, de manera que el isótopo se encuentra homogéneamente mezclado con los átomos no radiactivos en el dióxido de carbono de la atmósfera y en una proporción constante.

Durante la fotosíntesis, las plantas incorporan átomos radiactivo, de manera que la proporción $^{14}C/^{12}C$ en éstas es similar a la atmosférica. Los animales incorporan, por ingestión, el carbono de las plantas. Ahora bien, tras la muerte de un organismo vivo no se incorporan nuevos átomos de ^{14}C a los tejidos, y la concentración del isótopo va decreciendo conforme va transformándose en ^{14}N.

Así pues, al medir la cantidad de radiactividad en una muestra de origen orgánico, se calcula la cantidad de ^{14}C que aún queda en el material. Y a partir de ahí la antigüedad estimada del fósil. La fórmula es la siguiente:

$$t = \frac{T_{1/2}}{-\ln 2} \cdot \ln\left(\frac{N_f}{N_0}\right)$$

N_0: cantidad de ^{14}C original del fósil (al morir).
N_f: cantidad de ^{14}C final del fósil (al encontrarlo). Por tanto, **N_f/N_0** es la proprción de ^{14}C que le queda respecto a la que tenía en el momento de morir, suele medirse en tanto por ciento.
$T_{1/2}$: periodo de semidesintegración del ^{14}C.
t: tiempo estimado de antigüedad del fósil.



Sabiendo la diferencia entre la proporción de ^{14}C que debería contener un fósil si aún estuviese vivo (semejante a la de la atmósfera en el momento en que murió) y la que realmente contiene, se puede conocer la fecha de su muerte de forma bastante exacta. Para medir la cantidad de ^{14}C restante en un fósil, los científicos incineran un fragmento pequeño para convertirlo en gas de dióxido de carbono. Se utilizan contadores de radiación para detectar los electrones emitidos por el decaimiento de ^{14}C en nitrógeno. La cantidad de ^{14}C se compara con la de ^{12}C, forma estable del carbono, para determinar la cantidad de radiocarbono que se ha desintegrado y así datar el fósil.
Veamos dos ejemplos de la utilización de esta fórmula. Se ha encontrado un fósil con un 10% de ^{14}C en relación con una muestra viva, entonces el fósil tendría una antigüedad de aproximadamente 19.138 años.
Sustituimos y resolvemos

$$t = \frac{T_{1/2}}{-\ln 2} \cdot \ln\left(\frac{N_f}{N_0}\right) = \frac{5760}{-0'693} \cdot (\ln 0'10) = 19.138$$

Si tenemos una muestra con 60 gr de ^{14}C, ¿cuánto habrá en el fósil dentro de 8.000 años?

$$t = \frac{T_{1/2}}{-\ln 2} \cdot \ln\left(\frac{N_f}{N_0}\right) = \frac{5760}{-0'693} \cdot \left(\ln \frac{N_f}{60}\right) = 8.000$$

Despejando: N_f=22'91 gr.

En la práctica, la datación se complica porque la concentración atmosférica de ^{14}C ha variado sustancialmente a lo largo del tiempo. Esto hace que se necesite saber no sólo la cantidad de ^{14}C que queda en la muestra fósil, sino también la concentración atmosférica que existía en el momento de su muerte.
Se conocen, más o menos con exactitud, las variaciones de ^{14}C habidas en los últimos 11.800 años gracias a la dendrocronología, es decir, al análisis de la madera de los anillos (cuyas edades conocemos por conteo) de series solapadas de troncos de árboles vivos y fósiles de Europa.

Más allá los datos son más pobres e imprecisos y no pueden basarse en el estudio de árboles fósiles, aunque recientemente ha surgido la esperanza de poder hacerlo con unos enormes árboles fósiles neozelandeses denominados kauri, que pueden vivir hasta mil años, y que se han encontrado enterrados en antiguas marismas.
La mayor polémica en que se ha visto envuelto este método ha sido debida a la datación del sudario de Turín en el siglo XIV, y, por consiguiente, no pudo envolver a Jesús.

A VOTAR...

El sistema electoral es el conjunto de medios a través de los cuales la voluntad de los ciudadanos se transforma en órganos de gobierno o de representación. Una vez hecho el recuento de votos, ¿cómo se eligen los representantes? Este artículo presenta diferentes formas de elegir un representante, ¿cuál es, si existe, la mejor?

En una clase con 49 alumnos se va a elegir delegado. Hay tres candidatos: A, B y C. Cada compañero tiene sus preferencias. Es razonable pensar que si un votante prefiere a A antes que a B y a B antes que a C, entonces también preferirá a A antes que a C (transitividad). Esto permite asociar a cada votante un orden de preferencia que indicaremos A>B>C.

Supongamos que en nuestra clase los órdenes de preferencia son:

A>C>B	21 alumnos
B>C>A	16
B>A>C	5
C>B>A	4
C>A>B	3

Si cada alumno vota a su candidato preferido los resultados serán:

A>C>B	21	21 votos para A
B>C>A	16	16 + 5 = 21
B>A>C	5	Votos para B
C>B>A	4	4 + 3 = 7
C>A>B	3	Votos para C

Para deshacer el empate entre A y B se hace una nueva votación en la que sólo se puede votar a uno de ellos, entonces el resultado es:

A>C>B	21	21 votos para A
B>C>A	16	16 votos para B
B>A>C	5	5 votos para B
C>B>A	4	4 votos para B
C>A>B	3	3 votos para A

Por lo tanto **gana B** con 25 votos frente a los 24 de A.

Cuando van a nombrar a B delegado, un seguidor de C pide que levanten la mano los que prefieren a C antes que a B, y para sorpresa de todos:

A>C>B	21	21 prefieren a C
B>C>A	16	16 prefieren a B
B>A>C	5	5 prefieren a B
C>B>A	4	4 prefieren a C
C>A>B	3	3 prefieren a C

Es decir, 28 prefieren a C frente a 21 que prefieren a B. Si más gente prefiere a C frente a B, se **debe elegirse a C**.
Entonces un seguidor de A pregunta: ¿Quién prefiere a A antes que a C?
El resultado es:

A>C>B	21	21 prefieren a A
B>C>A	16	16 prefieren a C
B>A>C	5	5 prefieren a A
C>B>A	4	4 prefieren a C
C>A>B	3	3 prefieren a C

Es decir, **A gana** por 26 a 23.

Acabamos de presentar la conocida como paradoja de Condorcet, en honor de Antoine Caritat Condorcet, que estudió el problema a finales del siglo XVIII con la intención de encontrar el tamaño óptimo de los jurados de la Revolución Francesa.
El hecho de que una mayoría prefiera a A antes que a B y a B antes que a C, no conduce necesariamente a que prefieran a A antes que a C.
Cuando el método falla, como en el caso anterior, se recurre a una regla sencilla:

De los enfrentamientos por parejas se elimina el más reñido: aquel en que la diferencia entre el ganador y el perdedor es mínima. Si tras la eliminación hay un ganador, éste es el candidato elegido. En caso contrario se continúa hasta que finalmente haya un ganador. Para nuestra elección de delegado:

Enfrentamiento	votos	diferencia
A contra B	A:24 B:25	1 para B
B contra C	B:21 C:28	7 para C
A contra C	A:26 C:23	3 para A

Si eliminamos el enfrentamiento A-B (por ser el de menor diferencia), entonces C gana a B pero pierde ante A. Eliminamos el siguiente enfrentamiento de menor diferencia: A-C y, por tanto, C es ganador.

Estatua de Jean-Charles de Borda en Dax, departamento de Landas, Aquitania.

Para salvar estas paradojas, en 1780, el matemático francés Jean-Charles de Borda, propone un nuevo sistema que consideraba más justo (sólo duró 20 años pues fue prohibido por Napoleón).

El sistema es el siguiente: Cada votante debe ordenar sus candidatos por orden de preferencia y se reparten "puntos". Por ejemplo, en nuestro caso, una preferencia A>B>C daría 2 puntos a A, 1 punto a B y 0 puntos a C.

Este sistema de votación da ganador a C:

	votantes	Puntos para A	Puntos para B	Puntos para C
A>C>B	21	2*21	0*21	1*21
B>C>A	16	0	2*16	1*16
B>A>C	5	1*5	2*5	0
C>B>A	4	0	1*4	2*4
C>A>B	3	1*3	0	2*3
TOTAL:		**50**	**46**	**51**

En 1952 Kenneth Arrow, economista y matemático, llegó a demostrar que no existe un sistema de votación perfecto. Vamos a ver el poder que tiene aquel que elige el sistema de votación.

Kenneth Arrow

Un colectivo de 45 personas va a elegir a su representante entre 5 candidatos, A, B, C, D y E. El orden de preferencia de los electores viene dado por la tabla (obviamos ahora los símbolos ">":

Preferencia	Nº de personas
ADECB	18
BEDCA	12
CBEDA	9
DCEBA	4
ECDBA	2

Utilizando cinco métodos de votación razonables se obtienen estos sorprendentes resultados:

1. Votación única: Se vota una vez. Sale elegido el que saque más votos.

Preferencia	votos
ADECB	18 para A
BEDCA	12 para B
CBEDA	9 para C
DCEBA	4 para D
ECDBA	2 para E

Gana A. Obsérvese que A es la última opción para los 27 electores restantes.

2. Votación a dos vueltas. Se vota una primera vez y se eligen los dos candidatos con mayor número de votos. Se vota una segunda vuelta sólo entre estos dos. Gana el que saque más votos en esta segunda vuelta.

Preferencia	Votos 2ª vuelta
ADECB	18 para A
BEDCA	12 para B
CBEDA	9 para B
DCEBA	4 para B
ECDBA	2 para B

Gana B por 27 votos a 18.

3. Eliminación del último: Se vota cuatro veces sucesivamente. En cada vuelta se elimina el último. Se elige al que queda.

	1ª	2ª	3ª	4ª
A	18	18	18	18
B	12	12	12	--
C	9	11	15	27
D	4	4	--	--
E	2	--	--	--

Gana C.

4. Votación ponderada: Es el método de de Borda. Se asignan 4 puntos a la primera opción de cada elector, 3 puntos a la segunda, 2 a la tercera, 1 a la cuarta y 0 a la quinta. Sale elegido quien tenga más puntos.

	Nº de puntos
A	72
B	81
C	84
D	**107**
E	106

Gana D.

5. Método de Condorcet: Se estudian todos los enfrentamientos entre dos candidatos. Si uno gana a todos los demás es el ganador. Los resultados de los diferentes emparejamientos son:

Enfrentamiento	votos
A - B	A:18 B:27
A - C	A:18 C:27
A – D	A:18 D:27
A – E	A:18 **E:27**
B – C	B:12 C:33
B – D	B:21 D:24
B – E	B:21 **E:24**
C – D	C:11 D:34
C – E	C:13 **E:32**
D - E	D:22 **E:23**

En este caso hay 10 emparejamientos y **gana E** a todos los demás.

Condorcet

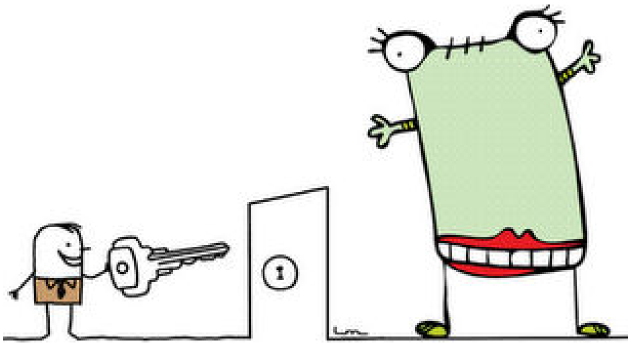
Una serie de resultados demostrados hace una década por el matemático Donald Saari de Northwest University muestran que las hipótesis del Teorema de Arrow permiten que los electores sean “irracionales”, es decir, que puedan hacer elecciones transitivas y de ahí las paradojas.

Adoptando unas hipótesis que excluían esta posibilidad, el resultado de Saari es nuevamente sorprendente. El único proceso democrático que asegura una elección justa es el recuento de de Borda.

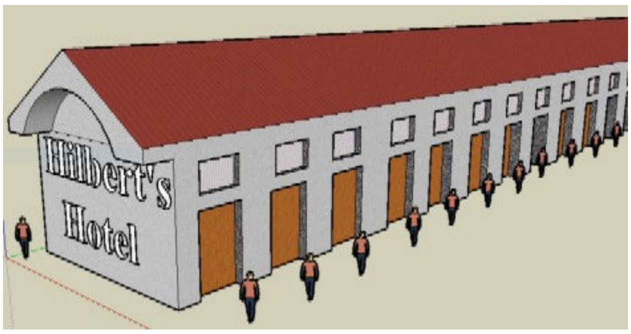
HOTEL INFINITO

*El **Hotel Infinito** es una construcción abstracta inventada por el matemático alemán David Hilbert [1862-1943]. Explica, de manera simple e intuitiva, hechos paradójicos relacionados con el concepto matemático de infinito (más exactamente con los cardinales transfinitos introducidos por el matemático Georg Cantor).*

La historia es la siguiente: en un futuro lejano, el hombre será capaz de construir un hotel con infinitas habitaciones. Los huéspedes siempre tendrán habitación asegurada, pero con el acuerdo previo de que deberán cambiar de habitación cada vez que se les pida.



En un momento dado, el hotel se encuentra completo y llega un nuevo huésped. El recepcionista, consciente de que no habrá problema alguno, toma un micrófono y solicita a todos los huéspedes que revisen el número de su habitación, le sumen uno y se cambien a ese número de habitación, de esta manera el nuevo huésped podrá dormir tranquilamente en la habitación número 1.



En cierta ocasión en que el hotel estaba lleno, llegó una excursión de infinitos turistas que necesitaban hospedaje por una noche.

El recepcionista no tuvo ningún problema, cogió el micrófono y pidió a todos los huéspedes que se mudaran a la habitación correspondiente al resultado de multiplicar por 2 el número de su habitación actual. De esa forma todos los huéspedes pasaron a una habitación par, y las habitaciones impares quedaron libres. Como hay infinitos números impares, los infinitos turistas pudieron alojarse sin más problema.

En otra ocasión, estando el hotel lleno, llegó un representante de una agencia de viajes muy preocupado. Tenía un número infinito de excursiones con un número infinito de turistas cada una. El recepcionista permaneció inmutable, cogió tranquilamente el micrófono y se comunicó solamente con las habitaciones cuyo número fuera primo, *p*, o alguna potencia de estos (p^n). Pidió a sus huéspedes que elevaran el número 2 al número de la habitación en la que se encontraban 2^{p^n} y que se cambiaran a esa habitación. Así quedan ocupadas todas las habitaciones cuyo número es potencia de dos y vacías aquellas cuyo número es potencia de un primo distinto de dos. Es decir, se desocupan toda las potencias de 3, las de 5, y las de todos los números primos mayores que dos.

Entonces asignó a cada una de las excursiones un número primo *p* a partir de *tres*, a cada uno de los turistas de cada una de las excursiones un número natural *n*, de manera que la habitación de cada uno de los turistas, se calculaba tomando el número primo de su excursión y elevándolo al número que les tocó dentro de su excursión n lo que da p^n.

Existiendo un número infinito de números primos –algo demostrado hace más de 2.000 años por Euclides-, fácilmente se logró hospedar a un número infinito de excursiones de infinitos huéspedes dentro de un hotel que *sólo* tiene un número infinito de habitaciones.

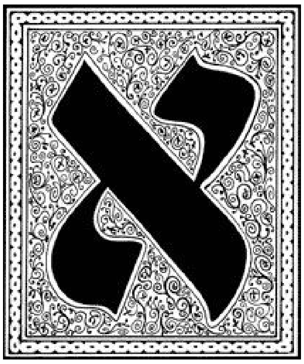
¿Qué ocurriría si un día con el hotel completo el recepcionista pidiera a los huéspedes que, si están en la habitación N pasen a la 2^N? ¿Cuántas habitaciones vacantes quedarían?

En matemática, se define $\aleph_0$ (primera letra del alfabeto hebreo, se lee "Aléf-sub-cero" o "Aléf cero") como el cardinal[1] del conjunto de los números naturales. Es decir, hay $\aleph_0$ números naturales. Sorprendentemente, al menos en apariencia, también hay $\aleph_0$ números pares y $\aleph_0$ números impares. La prueba es sencilla: tomemos los números pares: {2, 4, 6, 8 ...}, dividamos cada uno entre 2 ¿qué se obtiene? {1, 2, 3,...}, los naturales. Por tanto hay tantos pares como naturales.

$\aleph_0$ es el menor cardinal transfinito, en el sentido de que es el menor infinito que existe, por ejemplo: $\aleph_0 - 1 = \aleph_0$.

[1] El cardinal de un conjunto es el número de elementos que contiene.

Cualquier conjunto que contenga $\aleph_0$ elementos se dice que es *numerable*. Esto significa que sus elementos se pueden numerar, es decir, emparejar con {1, 2, 3, ...}



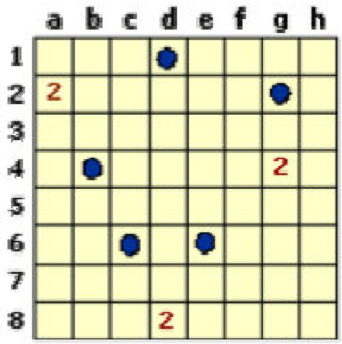
En cambio el cardinal del conjunto de números reales es $\aleph_1$, alef-1, es un infinito mayor al $\aleph_0$ y no existe otro infinito entre ambos.

Lo fundamental de este artículo es la idea de que infinito no es un número. Existen infinitos infinitos y una aritmética "transfinita". Si el lector quiere profundizar en este tema puede leer el suplemento de este boletín.

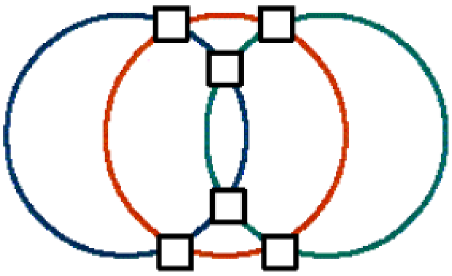
Jorge Luís Borges tiene un cuento titulado "El Aleph", en él, como en tantos otros, juega el escritor argentino con la idea de infinito. Como fin de este artículo incluímos un párrafo de otro de sus cuentos, "Un sueño":
En esa celda circular, un hombre que se parece a mí escribe en caracteres que no comprendo un largo poema sobre un hombre que en otra celda circular escribe un poema sobre un hombre que en otra celda circular... El proceso no tiene fin y nadie podrá leer lo que los prisioneros escriben.

Tres problemas fáciles

1. En este tablero de ajedrez hay colocados un rey, una reina, una torre, un alfil y un caballo del mismo color. Los círculos indican las casillas que ocupan pero no se dice a que pieza corresponde. Las casillas con número indican el número de piezas que amenazan a esa casilla.
Con estas informaciones has de intentar decir donde está cada pieza.



2.- Coloca los números 1, 2, 3, 4, 5 y 6 en cada uno de los cuadros de modo que los de cada circunferencia sumen lo mismo.

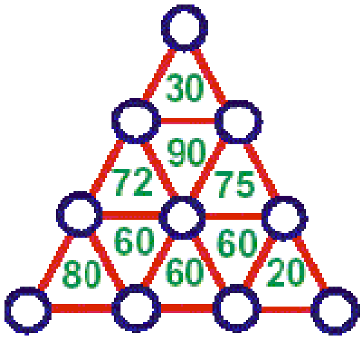


3.-Aquí tienes un producto capicúa formado dos números de dos cifras que continúa dando lo mismo cuando invertimos sus cifras. Las dos multiplicaciones dan 2.418.
¿Puedes encontrar más? (No valen los números con las dos cifras iguales)

26 x 93 = 39 x 62

Tres problemas un poco difíciles

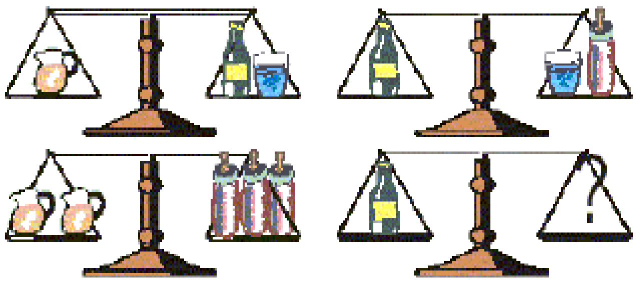
1.-Observa esta lista de números: 1 1 3 4 4 4 5 5 5 6. Los has de colocar en los círculos del dibujo teniendo en cuenta que el número que hay escrito en cada triángulo es el producto de los tres que hay en los vértices. ¿Dónde va cada número?



2.- Observa los equilibrios:

- Una botella y un vaso pesan tanto como una jarra
- Una botella pesa tanto como un vaso y un biberón
- Dos jarras pesan tanto como tres biberones

Sabiendo eso, ¿cuántos vasos se necesitan para equilibrar una botella?



3.- El 325 es un número muy curioso: la suma de las dos primeras cifras dan la última.
¿Cuántos números de tres cifras tienen esta propiedad?

Envíanos tus respuestas y participarás en nuestros sorteos. Recuerda nuestras direcciones:
materranya@yahoo.es
http://materranya.iespana.es