

NÚMEROS PRIMOS

Muchas veces han aparecido en este boletín referencias a los números primos. Recientemente se ha puesto de moda una novela titulada “La soledad de los números primos” que bien poco tiene que ver con ellos.

Son escasos los resultados que acerca de ellos se mencionan. Se habla de los primos gemelos: aquellos cuya diferencia es dos: el 3 y el 5, y el 11 y el 13, por ejemplo. También se menciona que la mayoría de los primos no tienen gemelo, por tanto están “solos”, de ahí el título de la novela que retrata unos cuantos personajes solitarios. No hubiera estado mal que incluyera una bonita demostración de miles de años de antigüedad, debida a Euclides, de que la lista de números primos es infinita. Paolo Giordano, autor del libro, seguro que la conoce. Su atractivo reside en que cualquier alumno de E.S.O. puede entenderla.



Paolo Giordano

Factoricemos un número en producto de primos, por ejemplo, $15 = 3 \cdot 5$. Está claro que $15:3$ y $15:5$ será división con resto cero. Si dividimos 16 entre 3 ó 5, su resto será 1.

Bien, Euclides pensó como sigue: supongamos que la colección de números primos es finita, formada por n de ellos: $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$. Ahora construimos el producto $P = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_n$, la división de este número P entre todos los primos desde p_1 hasta p_n es exacta, tiene resto cero, por tanto $P+1$, al dividirlo entre todos los primos dará de resto 1. Es decir, este número no puede factorizarse como producto de

primos, y es mayor que todos ellos, por tanto es un nuevo número primo. Por tanto, dada una colección de números primos, se puede conseguir otro primo mayor, así pues, hay infinitos.



Euclides

Por cierto, buscando en Internet sobre este libro se halla esta joya de comentario: “*Nunca, en toda mi vida había sentido tanta atracción por las matemáticas como leyendo La soledad de los números primos.*” Evidentemente su autor sigue sin saber qué son las matemáticas.

Por si alguien quiere seguir escribiendo una novela sobre números primos, le sugerimos el 23 porque: Es el único número primo p tal que $p!$ tiene una longitud de p dígitos.

Es el menor primo que no tiene gemelo.

El homo sapiens tiene 23 pares de cromosomas.

111111111111111111111111 (23 unos) es un primo repunit («repunit» es un neologismo acuñado a partir de «repeated unit»).

$11111 \times 1111^{11} + 11111111111 + 1$ (23 unos) es primo.

$$23 = 1^4 + 2^3 + 3^2 + 4^1 + 5^0.$$

$$23 = 5 + 7 + 11 \text{ -cinco primeros primos consecutivos-}$$

$$2! + 3! = 2^3.$$

$$23 = -(2^2 - 3^3).$$

$$23 = 1! + (2! + 2!) + (3! + 3! + 3!).$$

$$23 = (2^2 + 3^3) - (2! + 3!).$$

$$2^{23} + 3^{23} + 2 \cdot 3 \text{ es primo.}$$

Existen 23 pares distintos de primos menores de 1000 que suman 1000.

Y si quieres más curiosidades, visita:

<http://primes.utm.edu/curios/page.php/23.html>

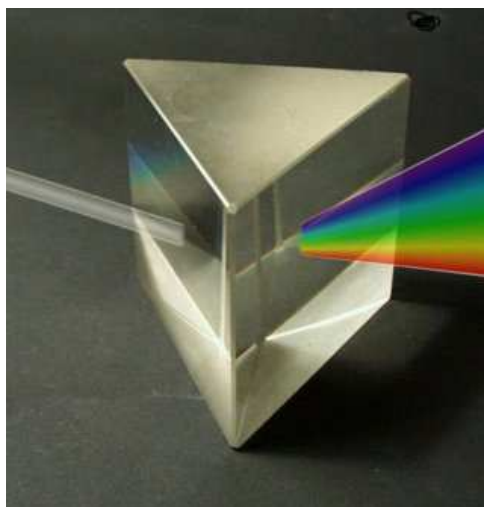


CLASIFICACIÓN ESPECTRAL DE LAS ESTRELLAS

En 1913 los astrónomos Hertzprung y Russell establecieron, de manera independiente, un esquema para la clasificación de todas las estrellas de acuerdo con dos parámetros: **temperatura y luminosidad**. Lo que se conoce como **diagrama H-R** (por las iniciales de sus descubridores) pronto se reveló como una herramienta potentísima en el estudio de la estructura y evolución de las estrellas. De manera análoga a como la catalogación de los seres vivos condujo a Darwin a la teoría de la evolución de las especies, la clasificación H-R de las estrellas condujo a los astrónomos a establecer, en la primera mitad del siglo XX, una **teoría de la evolución estelar** que es considerada como uno de los mayores logros de la Astrofísica de todos los tiempos.

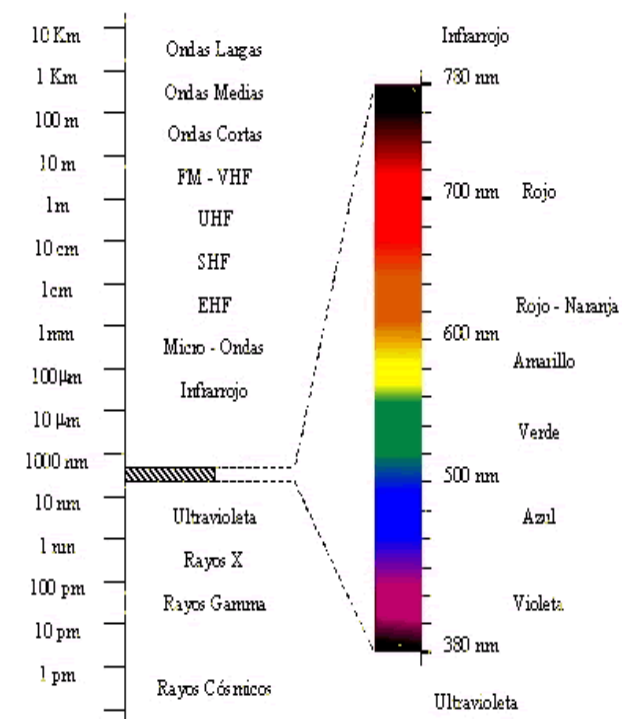
En cualquier noche despejada, mejor sin luna y lejos de una población, es fácil ver que las estrellas tienen colores y brillos diferentes. Esto se debe a las diferencias en las cantidades de energía que las estrellas emiten en varias longitudes de onda.

Las longitudes de onda del espectro visible son escasas, van de 750 nm. a 390 nm. (1 nanómetro, abreviado nm., equivale a 10^{-9} metros.) La primera longitud de onda corresponde al color rojo y la última al violeta, entre ellas están las correspondientes al naranja, al amarillo, al verde, al azul y al añil.



Cada estrella emite energía en un amplio rango de longitudes de onda, desde microondas –las de mayor energía– hasta rayos X y gamma, rango del que la parte visible es una proporción minúscula.

Los astrónomos cuentan con unos aparatos llamados espectroscopios que, como un prisma con un rayo de luz, separan el espectro de una estrella (las ondas que llegan de ella.) En principio debería verse todo un “arco iris”, pero en realidad en él aparecen ciertas líneas negras.



Se sabe que cuando átomos de un elemento químico son iluminados con luz blanca, los rayos de luz que los han atravesado presentan un cierto patrón o modelo de tales líneas. Esto se debe a que cada elemento químico es capaz de absorber luz de ciertas longitudes de onda, es decir, de ciertas energías y luego la luz de ese color no se observa. Esto sirve para saber de qué elementos están formados objetos estelares distantes. Estas líneas oscuras fueron descubiertas con el sol de manera accidental. El astrónomo alemán Joseph von Fraunhofer las estudió alrededor del año 1.800, por eso suelen llamarse líneas de Fraunhofer. Ya en la década de 1860 el padre Angelo Secchi (1818-1878) tras examinar visualmente los espectros de varios miles de estrellas había identificado **cuatro tipos principales**:



- 1.- Estrellas blancas del tipo de Sirio y Vega
- 2.- Estrellas amarillas de tipo solar
- 3.- Estrellas anaranjadas y variables como Betelgeuse y Antares
- 4.- Estrellas muy rojas como Mira

Este trabajo fue continuado por numerosos astrónomos entre los que cabe destacar al alemán Hermann Karl Vogel (1841-1907) quien utilizó los espectros para determinar la velocidad de aproximación o alejamiento de un gran número de estrellas mediante el efecto Doppler.

Según el tipo de espectro de las estrellas, estas se clasifican en categorías de extraño nombre: O, B, A, F, G, K, y M. Cada una de ellas está dividida en 10 subcategorías, designadas por 0, 1, 2,..., 9. Así, por ejemplo, tras el tipo A9 sigue el F0.

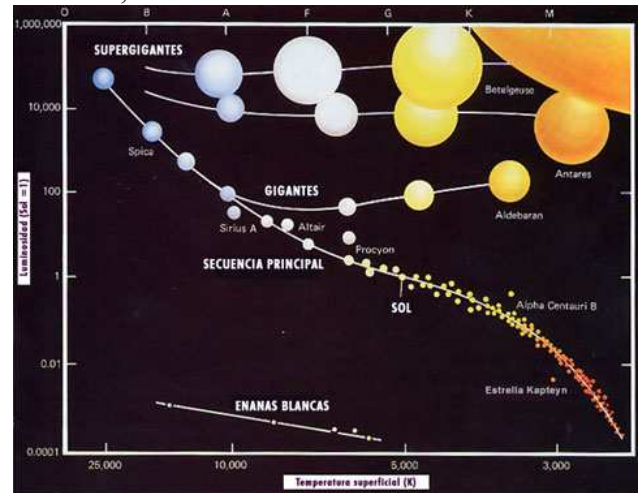


En total hay 70 tipos espectrales de estrellas. Esto tiene que ver con la temperatura de la superficie de la estrella. Las de tipo O son las de mayor temperatura y a nuestra vista aparecen azuladas. En el otro extremo, las de tipo M, tienen un color anaranjado o rojo. Dentro de cada tipo, el 0 representa las de mayor temperatura y el 9 las de menor. La estrella de mayor temperatura posible será, por tanto, de tipo O0 y la más fría M9. En esta escala, nuestro sol es G2.

La temperatura de la superficie de una estrella está relacionada con su magnitud absoluta (véase Materraña nº 13), esta relación fue establecida de modo independiente a principios de los años 1.900 por el astrónomo danés Ejnar Hertzsprung y el americano Henry Norris Russell. Ambos hicieron un diagrama que

representa la magnitud absoluta de algunas estrellas cercanas y su clasificación espectral. Encontraron que, en general, según aumenta la temperatura de la superficie de las estrellas, también lo hace su brillo. Esto parece razonable, pero hay más. La temperatura no es el único factor importante de la estrella, también lo es su masa. Nuestro sol es relativamente pequeño, hay estrellas gigantes y estrellas enanas. Hay gigantes rojas: estrellas grandes pero “frías”, también hay enanas blancas.

Lo que Hertzsprung y Russell vieron en sus diagramas, poniendo en el eje horizontal la temperatura y en el vertical la magnitud absoluta, fue esto:



Las gigantes rojas se agrupan en la parte superior derecha, las gigantes azules en la superior izquierda, sobre la “secuencia principal”. Las estrellas más pequeñas y frías, las enanas rojas, están en la zona inferior derecha de la secuencia principal y las enanas blancas debajo de la “secuencia principal”, fuera de ella. También están las estrellas supergigantes que tampoco están en la secuencia principal.

Pero, ¿qué es exactamente la “secuencia principal”? Cuando Hertzsprung y Russell hicieron sus gráficos vieron que la mayoría –por eso se llama “principal”- de estrellas estaban en una curva que recorría la diagonal de la parte superior izquierda a la inferior derecha. Cuando los astrónomos estudiaron la relación entre la posición en el diagrama y la posición en la galaxia, descubrieron que las estrellas calientes y masivas se concentran en la parte plana (en



forma de disco) de la Vía Láctea, es decir, en sus brazos espirales, no en la región central. En estos brazos es donde se encuentra mayor cantidad de polvo y gas interestelar. Como las estrellas se forman a partir de estos materiales, se conjeturó que las estrellas de esa zona podrían ser más jóvenes que las cercanas al centro. Esto llevaría a que la galaxia se ha desarrollado desde el centro hacia afuera.



Ejnar Hertzsprung y Henry Russell

Las estrellas se forman a partir de nubes de gas y polvo. Si en el espacio estos materiales se distribuyeran de forma homogénea, en teoría, nada se formaría. Pero una ligera irregularidad llevaría a otra mayor creando zonas donde se concentraran materiales. Esto se conoce como “efecto mariposa” y da lugar a la formación de estrellas. La ligera irregularidad mencionada crearía una zona del espacio más densa, con lo que aumentaría la atracción gravitatoria sobre su alrededor, atraería materiales circundantes, aumentaría su densidad y, de nuevo, la atracción gravitatoria. Llega un momento en que la densidad es tan alta que los átomos de hidrógeno se fusionan en helio generando gran cantidad de energía. Una estrella joven, incluso mientras se está formando, no es muy luminosa, por tanto está en la parte baja del diagrama H-R. Después, la estrella aumentará su luminosidad, con lo que “subirá” en el diagrama. Luego tendrá un período de “descanso” en la secuencia principal. Si es muy masiva, subirá hacia al parte izquierda y se convertirá en supergigante azul, las menos masivas alcanzan su posición más estable en la zona inferior derecha y se convierten en enanas rojas.

Las 14 estrellas más brillantes de nuestro cielo

Or	Nombre Estrella	Color-Luz	Constelación	Espectro
1	Sol	¿?	Sistema Solar	G2
2	Sirio	azul-blanca	Can Mayor	A1
3	Canopus	blanca	Eta Carina	F011
4	Rigel Kent	amarilla	Centauro	G2V
5	Arcturus	amarilla-roja	Botero	K1
6	Vega	azul-blanca	Lyra	A0V
7	Capella	amarilla	Auriga	G8
8	Rigel	Azul-blanca	Orion	B8
9	Procyon	Blanca	Can Menor	F5
10	Archenar	Azul	Eri	B3
11	Betelguse	roja	Orion	M2
12	Aldebaran	Amarilla-roja	Tauro	K5
13	Spica	Azul	Virgo	B2
14	Antares	Roja	Escorpión	M1

En la secuencia principal cada estrella pasa el 90% de su vida, aproximadamente. La cantidad de tiempo en esta fase varía de 2-3 millones de años para las estrellas más masivas y calientes a miles de millones de años para estrellas como nuestro Sol o incluso centenares de miles de millones de años para las estrellas menos calientes y masivas. La estancia de la estrella en la secuencia principal se mantendrá mientras siga siendo capaz de fusionar hidrógeno en su núcleo; una vez agotado, el astro podrá adoptar dos formas de evolucionar según sea el nivel de su masa.

Agotadas las reservas del núcleo, las estrellas con **menos de 9 masas solares** empezarán a fusionar el hidrógeno de las capas superiores anexas a aquel. Debido a esto, el astro se enfría y se hincha, pudiendo alcanzar un radio cercano a los **100 millones de kilómetros** y aumentando notablemente su luminosidad. Además, el descenso de las temperaturas provoca que las emisiones de luz adquieran un tono rojizo; llegados a este punto del proceso se dice que la estrella ha entrado en fase de gigante roja. El siguiente paso de la evolución estelar sucede cuando la gigante roja no tiene más hidrógeno que fusionar y empieza a recurrir al helio como combustible. En los casos en que la masa estelar sea **inferior a 0,5 masas solares**, el astro no tendrá la temperatura interior suficiente para activar este proceso, entrando directamente en declive. Para aquellos otros casos en que la masa **sí supere la franja de 0,5 masas solares** se produce una disminución del volumen y la luminosidad. Agotado el helio nuclear, la estrella recurre de nuevo a las reservas de sus capas anexas, volviendo a enfriarse y a aumentar de tamaño hasta alcanzar



aproximadamente el doble de volumen obtenido como gigante roja, además de su cota más alta de luminosidad. En última instancia, y una vez agotadas incluso la reservas de helio, la estrella podrá recurrir a las capas más externas de hidrógeno para mantener su actividad nuclear. En cualquier caso, la estrella, que desde la fase de gigante roja ha estado expulsando el material de sus capas más externas al exterior, se descompondrá finalmente durante la fase de Rama asintótica gigante en forma de nebulosa planetaria, dejando como único remanente un núcleo estelar degenerado y brillante, es decir, una enana blanca.

Las estrellas de **entre 9 y 30 masas solares** experimentan una evolución física tras el agotamiento de hidrógeno que las hace atravesar el diagrama de Hertzsprung-Russell a través de los estados de Supergigante azul y Supergigante amarilla. En este periodo la estrella mantiene su luminosidad constante mientras su temperatura superficial disminuye notablemente. Por lo general, estas estrellas suelen acabar en el estado de Supergigante roja, donde se produce la mayor parte de la combustión del helio, aunque para ciertas masas esta reacción se produce en unas etapas de supergigante azul y supergigante amarilla muy longevas. La supergigante roja seguirá consumiendo los distintos tipos de átomos sintetizados en su interior hasta llegar al hierro, formando una serie de capas similares a la de las cebollas con los elementos de distinto número atómico.

Llegado al límite de los procesos de reacciones nucleares la estrella se colapsará estallando como supernova. A las estrellas con masa **superior a 30 masas solares** aproximadamente les espera un destino similar; sin embargo, en ningún caso llegan a alcanzar el estado de supergigante roja, sino que, tras pasar por el de gigante azul, entran en una fase de alta inestabilidad llamada Variable luminosa azul, desprendiéndose de sus capas exteriores y adoptando las luminosidades estelares más alta conocidas en nuestro Universo. A causa de esta pérdida de masa, la estrella se transforma en un astro desprovisto de hidrógeno en su atmósfera, muy caliente y luminoso, caracterizado por una gran fuerza en sus vientos solares; se trata de

una estrella Wolf-Rayet. A partir de las **9 masas solares**, el destino de las estrellas resulta distinto del de las de masa inferior; debido a que el núcleo es incapaz de seguir generando energía a partir de la fusión éste se desestabiliza y hunde sobre sí mismo. En este momento de contracción final se generan multitud de elementos más pesados que el hierro por medio del proceso de captura de protones y neutrones. Por lo general, la muerte de la estrella se produce mediante un estallido de supernova, (y en algunos casos, como brote de rayos gamma) y su posterior conversión en remanente estelar.

El artículo sobre evolución estelar de la Wikipedia lo resume de la siguiente manera:

En función de la masa y de la metalicidad tenemos cuatro posibles destinos para las estrellas masivas y muy masivas:

1. Para la mayoría de las estrellas el remanente inicial será una estrella de neutrones y se producirá una supernova.
2. Si la masa inicial de la estrella es **superior a unas 30 masas solares**, parte de las capas exteriores no podrán escapar a la atracción gravitatoria de la estrella de neutrones y caerán sobre ésta provocando un segundo colapso para formar un agujero negro como remanente final. Este segundo colapso produce un brote de rayos gamma.
3. En estrellas de **masa superior a 40 masas Solares** y baja metalicidad el remanente inicial es un agujero negro, por lo que las capas exteriores no podrían en principio rebotar contra él para producir una supernova. No obstante, los modelos actuales no descartan que se pueda producir una supernova débil, sobre todo si la velocidad de rotación de la estrella es elevada. Este grupo de objetos también produce un brote de rayos gamma.
4. Para el infrecuente caso de estrellas de muy baja metalicidad y masa **entre 140 y 260 masas Solares** existe una última posibilidad: una explosión de supernova producida por la creación de pares electrón-positrón. En dicho caso la estrella se desintegra por completo sin dejar un remanente.



Resolver (algunas) ecuaciones con la ayuda de François Viète

Resolver ecuaciones de segundo grado es sencillo, todos conocemos la expresión:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

La ecuación de tercer grado es peor, para $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ el programa *Derive* da:

$$x_1 = \frac{2 \cdot \sqrt{a^2 - 3b} \cdot \cos\left(\frac{1}{3} \arccos\left(\frac{2a^3 - 9ab + 27c}{2 \cdot (a^2 - 3b)^{3/2}}\right)\right) - a}{3}$$

$$x_2 = \frac{2 \cdot \sqrt{a^2 - 3b} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{3} \operatorname{arcsen}\left(\frac{2a^3 - 9ab + 27c}{2 \cdot (a^2 - 3b)^{3/2}}\right)\right) - a}{3}$$

$$x_3 = \frac{2 \cdot \sqrt{a^2 - 3b} \cdot \sin\left(-\frac{1}{3} \operatorname{arcsen}\left(\frac{2a^3 - 9ab + 27c}{2 \cdot (a^2 - 3b)^{3/2}}\right)\right) - a}{3}$$

Pero hay métodos “sencillos” de resolver $x^3 + px + q = 0$, el siguiente es una versión reducida del dado por el matemático francés François Viète (1540-1603).¹



François Viète

Haciendo el cambio $x = y \cdot \cos t$, se obtiene:

$$(y \cdot \cos t)^3 + p \cdot y \cdot \cos t + q = 0$$

Dividiendo entre y^3 :

$$\cos^3 t + \frac{p \cdot \cos t}{y^2} + \frac{q}{y^3} = 0$$

De sus investigaciones anteriores, Viète sabía que²

$$\cos^3 t - \frac{3}{4} \cos t - \frac{1}{4} \cos 3t = 0.$$

Entonces, por similitud:

$$\frac{p}{y^2} = -\frac{3}{4} \quad y \quad \frac{q}{y^3} = -\frac{1}{4} \cdot \cos 3t$$

luego:

$$y^2 = -\frac{4p}{3} \quad y \quad \cos 3t = -\frac{4q}{y^3}$$

determinan y y t , pudiéndose así obtener x . De aquí se puede intuir la aparición de las razones trigonométricas en la resolución de ecuaciones de tercer grado.

Veamos un ejemplo. Intentaremos resolver $x^3 - 3x - 1 = 0$.

En este caso, $y^2 = -4p/3 = 4$, eligiendo $y = 2$, se obtiene $\cos 3t = 1/2$; luego

$$3t = \begin{cases} 60^\circ, 420^\circ, 780^\circ, 1140^\circ \dots \\ 300^\circ, 660^\circ, 1020^\circ, 1380^\circ \dots \end{cases}$$

por tanto:

$$t = \begin{cases} 20^\circ, 140^\circ, 260^\circ, 380^\circ = 20^\circ \dots \\ 100^\circ, 220^\circ, 340^\circ, 460^\circ = 100^\circ \dots \end{cases}$$

así $x = y \cdot \cos t$

$$x = \begin{cases} 2 \cdot \cos 20^\circ \approx 1'879 \\ 2 \cdot \cos 140^\circ \approx -1'532 \\ 2 \cdot \cos 260^\circ \approx -0'347 \end{cases}$$

Y basta tener en cuenta que $\cos 100^\circ = \cos 260^\circ$, $\cos 220^\circ = \cos 140^\circ$ y $\cos 340^\circ = \cos 20^\circ$ para deducir que las anteriores son las tres soluciones. Algo innecesario si se aplica el Teorema Fundamental del Álgebra. Eligiendo $y = -2$ se llega al mismo trío de soluciones.



Veamos, como curiosidad, otra forma de resolver $x^3+px+q=0$ cuando las raíces son enteras.

Comencemos con el ejemplo: $x^3-7x-6=0$.

Puede escribirse: $x^3-7x=6$

Sacando factor común:

$$x(x^2-7)=6$$

Buscamos una factorización "cercana" a x^2-7

$$x^2-9 = x^2-7-2$$

como en nuestra ecuación $x^2-7=6/x$:

$$x^2-9 = 6/x - 2$$

ahora:

$$\begin{aligned} x(x-3)(x+3) &= 6-2x \\ x(x-3)(x+3) + (2x-6) &= 0 \\ x(x-3)(x+3) + 2(x-3) &= 0 \\ (x-3)(x^2+3x+2) &= 0 \\ (x-3)(x+2)(x+1) &= 0 \\ x &= -1, -2, 3. \end{aligned}$$

En general, la ecuación $x^3+px=-q$ puede convertirse en $x(x^2+p-z) + z(x+q/z)=0$ eligiendo z de modo que x^2+p-z sea divisible entre $x+q/z$. Es decir, según el Teorema del resto, se trata de encontrar un valor de z tal que $z^3-pz^2=q^2$.

A Viète se le reconocen otros muchos méritos en matemáticas. Por ejemplo, en 1593 descubrió el conocido resultado:

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \dots$$

Fue la primera vez que un proceso infinito era escrito explícitamente con una fórmula.

Viète también descubrió la propiedad de la suma y productos de las raíces de una ecuación de segundo grado. En cambio fue defensor del sistema geocéntrico de Ptolomeo de explicar el Sistema Solar en contra del heliocéntrico de Copérnico.

Fue el primero en representar las incógnitas mediante letras, sólo que utilizó las vocales y no x, y, z , como hacemos actualmente, algo que debemos a Descartes.

Viète se dedicó profesionalmente a las leyes y a la política, a las matemáticas sólo en su tiempo libre por placer. Trabajó para el rey francés Enrique IV en su guerra contra la España de Felipe II descifrando de los mensajes secretos que se enviaban los españoles, que sorprendidos de que su código fuera descubierto, acusaron a

Francia de brujería "contraria a la práctica de la fe cristiana".



Portada de los "Principios de cosmografía", basados en el *Almagesto* de Ptolomeo. En ellos es muy crítico con Copérnico, estimando que es un flojo matemático y que hay escasa correspondencia entre su teoría y las observaciones.

Notas:

1 En realidad Viète resolvió una ecuación de grado 45 que sólo contenía grados impares. Fue un reto que propuso Adriaen van Roomen. Viète encontró una solución de inmediato y 22 más en veinticuatro horas.

2 Viète había deducido con anterioridad la recurrencia:

$\cos n\alpha = 2 \cdot \cos \alpha \cdot \cos (n-1)\alpha - \cos (n-2)\alpha$
que permite expresar $\cos n\alpha$ como combinación de senos y cosenos de α .

Tres problemas fáciles

1. Si $x^{200} = 2 \cdot x^{100}$, ¿cuánto vale x^{50} ?
- 2.- Reemplaza las arrobas con operaciones para que se cumpla que
 $1@2@3@4@5@6@7@8@9=91$
- 3.- Calcula:

$$1-2+3-4+5-6+\dots-998+999 = ?$$

Tres problemas un poco difíciles

1. En la tabla siguiente están distribuidos los números del 1 al 9:

A	B	C
D	E	F
G	H	I

se sabe que $C^2=I$, que $D \cdot F=E$, que A, E, I son consecutivos y que la primera columna suma más que las otras dos columnas o que cualquier fila. ¿Qué número representa cada letra?

- 2.- En este gráfico, contando con las cifras de 0 a 9 hemos hecho una suma de dos números de tres cifras para obtener otro que también tiene tres cifras. Si puedes usar las diez cifras una sola vez y el cero no puede aparecer al inicio de un número, ¿cuál es la suma máxima que puedes conseguir? ¿Y la mínima?

1	3	4	
5	8	6	9
7	2	0	

- 3.- En 1990 mi edad era la misma que la suma de las cifras de mi año de nacimiento, ¿Cuántos años cumplo en 2.010?

Casi una broma:

Vamos a calcular $\int \frac{1}{x \cdot \ln x} dx$.

Para ello utilizamos el método de integración por partes, eligiendo: $u = \frac{1}{\ln x}$ y $dv = \frac{1}{x} dx$.

Por tanto:

$$du = \frac{-1/x}{\ln^2 x} = -\frac{1}{x \cdot \ln^2 x} \text{ y } v = \ln x.$$

Así, aplicando:

$$\int u dv = u \cdot v - \int v du$$

se obtiene que:

$$\int \frac{1}{x \cdot \ln x} dx = \frac{1}{\ln x} \cdot \ln x - \int \ln x \cdot \frac{-1}{x \cdot \ln^2 x} dx = 1 + \int \frac{1}{x \cdot \ln x} dx.$$

Juntando las integrales delante del igual, se obtiene $0=1$.

Envíanos tus respuestas y participarás en nuestros sorteos. Recuerda nuestras direcciones:

materranya@yahoo.es
<http://materranya.iespana.es>