BOLETÍN DE MATEMÁTICAS DEL I.E.S. MATARRAÑA – Número 20 – AGOSTO 2.010

ENTEROS GAUSSIANOS

El conjunto de los números enteros

Z={ …, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, …}

es bien conocido por todos nosotros. Y, también lo es el conjunto de los números complejos

C={ a + bi; a, b $\in$ R}

Karl Friedrich Gauss se preguntó si tendría alguna utilidad considerar el conjunto de los números complejos cuyas partes real e imaginaria son números enteros. Lo cierto es que sí, pero nosotros sólo vamos a ver algunas curiosidades y vamos a dejar abierto un interrogante a nuestros lectores.

El conjunto mencionado se denomina en la actualidad **conjunto de los enteros gaussianos**, se representa como *Z[i]* y su definición es la siguiente:

Z[i] ={ a + bi; a, b $\in$ Z}

Bien, en los números enteros el número 13 es primo, ya que sólo es divisible por 1 por él mismo. Pero en *Z[i]*:

$$13= (2+3i)\cdot(2-3i) = (3-2i)\cdot(3+2i)$$

Es decir, el número 13 tiene otros *divisores* además del 1 y de él mismo, por lo que deja de ser primo si lo consideramos en el conjunto de los enteros gaussianos. Pero eso no ocurre con todos los números primos de Z. Por ejemplo, 7 es primo en Z y también lo es en *Z[i]*.

En este punto la pregunta está clara:¿Hay alguna forma de saber si un número primo en Z sigue siéndolo también en *Z[i]* ?

La respuesta es **sí**. Si P es un número primo en Zde la forma *4n + 1* entonces **deja de ser primo** en *Z[i]* (este es el caso del 13), pero si es de la forma *4n + 3* entonces **sigue siendo primo** en *Z[i]*.

El 2 no cumple ninguna de esas dos descripciones. Entonces, ¿es un primo gaussiano? Pues no:

$$2= (1+i)\cdot(1-i)$$

En general, dejando aparte el caso del 2, un entero gaussiano $x + yi$ es un *primo gaussiano* si y sólo si:

1. Si $x=0$ ó $y=0$ (sólo uno) y el otro es un primo de Z de la forma $4n + 3$ (o su negativo, $-(4n + 3)$).
2. Ambos son distintos de cero y $x^2 + y^2$ es un primo de Z.

Por ello, 7, por ejemplo, sí es primo gaussiano.

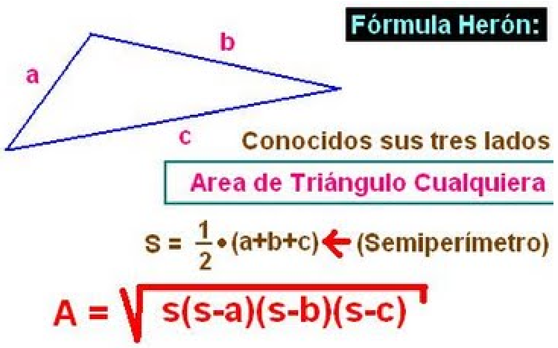
Lo que vamos a proponer al lector es sencillo: Se dice que $\{z_1, z_2\}$ es un par de enteros gaussianos si $z_1 + z_2 = z_1 \cdot z_2$, es decir, son dos números que suman y multiplican lo mismo. Pruebe a encontrar alguno y, si es tan amable, háganos saber sus logros.

LA FÓRMULA DE HERÓN.

De todos es conocida la fórmula del cálculo del área de un triángulo "base por altura partido por dos", pero su utilidad práctica no es muy grande: imagine el lector un campo de forma triangular, ¿cómo calcularía su área? Tal vez lo tenga más fácil si conoce la Fórmula de Herón.

La Fórmula de Herón permite calcular el área de un triángulo a partir de las longitudes de sus lados: Si *a, b, c* son las longitudes de los lados de un triángulo y *P* su perímetro, llamando *s* a *P/2*, entonces el área es igual a:

$$\sqrt{s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)}\ .$$



El triángulo se dice "de Herón" si tanto las longitudes de sus lados como su área son números enteros. Existen muchos triángulos de Herón, por ejemplo, aquellos cuyos lados miden (3, 4, 5), (6, 5, 5), (8, 5, 5), … Un método sencillo de fabricarlos es el siguiente: elija tres números enteros cualesquiera en orden creciente: *p, q, r*. Calcule

$a = p\cdot(q^2 + r^2)$, $b = q\cdot(p^2 + r^2)$,

y $c = (p+q)\cdot(p\cdot q - r^2)$.

Entonces el semiperímetro es $s = p\cdot q\cdot(p-q)$

y el área, con la fórmula de Herón:

$$p\cdot q\cdot r\cdot(p+q)\cdot(pq-r^2).$$

Pero, ¿qué ocurre si añadimos la condición de que las longitudes de sus lados sean números consecutivos? Estos triángulos se llaman Triángulos de Herón casi equiláteros.

Supongamos que los lados miden *a-1, a* y *a+1*. Entonces el perímetro es *3a*, y en la fórmula de Herón *s=3a/2*, y el área

$$A=\sqrt{\frac{3a}{2}\cdot\left(\frac{3a}{2}-(a-1)\right)\cdot\left(\frac{3a}{2}-a\right)\cdot\left(\frac{3a}{2}-(a-1)\right)}$$

$$A=\sqrt{\frac{3a}{2}\cdot\left(\frac{a}{2}+1\right)\cdot\left(\frac{a}{2}\right)\cdot\left(\frac{a}{2}-1\right)}$$

$$A=\sqrt{\frac{3a^2}{2^2}\cdot\left(\frac{a}{2}+1\right)\cdot\left(\frac{a}{2}-1\right)}$$

$$A=\frac{a}{2}\sqrt{3\cdot\left(\frac{a^2}{4}-1\right)}=\frac{a}{2}\sqrt{3\cdot\left(\frac{a^2-4}{4}\right)}=\frac{a}{4}\sqrt{3\cdot\left(a^2-4\right)}$$

Buscamos, por tanto, valores enteros de *a* para los que $\sqrt{3\cdot(a^2-4)}$ también sea entero. No parece una tarea atractiva, así que nos ayudamos de la hoja de cálculo y encontramos que los posibles valores de *a* son: 4, 14, 52, 194, 724, 2702, ... parece una sucesión un poco extraña, pero cumple que: $a_n=4\cdot a_{n-1}-a_{n-2}$, con $a_1=4$ y $a_2=14$.

De este modo que existen infinitos triángulos de Herón casi equiláteros. Por cierto, las unidad de las cantidades de esta sucesión siguen el patrón 4-4-2-4-4-2-…

Pero hay otra curiosidad: consideremos $a'_n=4\cdot a'_{n-1}-a'_{n-2}$, con $a'_1=2\sqrt{3}$ y $a'_2=8\sqrt{3}$, entonces, el área del triángulo *n-ésimo* es $\frac{a_n\cdot a'_n}{4}$.

Y la cifra de las unidades de estas áreas también sigue un patrón: 6-4-0-6-4-0-…

Herón de Alejandría

Como curiosidad añadiremos que Herón de Alejandría fue el inventor de la primera máquina expendedora, tal vez el lector nunca adivinara que a cambio de unas monedas dispensaba agua bendita en los templos egipcios.

Para acabar diremos que existe el tetraedro de Herón, es aquel cuyas caras son triángulos de Herón y su volumen es un entero y añadimos una advertencia: algunos autores consideran que los lados del triángulo de Herón y su área pueden ser racionales y no enteros como hemos presentado aquí.

6174

Posiblemente el Boletín Materraña llegue a su número 6174, pero como para ello faltan más de 500 años, no vamos a esperar ese tiempo para hablar de un número, aparentemente tan poco atractivo como el 6174.

Si decimos que este número es conocido como la Constante de Kaprekar, ya podemos intuir que tendrá cierto carácter excepcional, y así es. En 1949 el matemático D. R. Kaprekar, de Devlali, India, inventó un proceso conocido hoy como la Operación de Kaprekar. Es tan sencilla como se explica a continuación: elija un número de cuatro cifras (que no sean las cuatro iguales), ahora reordene las cifras de modo que construya el mayor número posible y el menor posible. Si, por ejemplo, elegimos el número 2010, al reordenarlo obtenemos 2100 y 0012. Finalmente, reste el menor al mayor: 2100 – 0012 = 2088, y repita la operación.

2100 – 0012 = 2088
8820-0288= 8532
8532-2358=6174
¡Vaya sorpresa!

Además, si seguimos: 7641 - 1467 = 6174.

D. R. Kaprekar, 1905 – 1986

Inténtelo con cualquier otro número. Siempre se llega a 6174 en un máximo de siete pasos, y lo más probable es que se necesiten sólo tres. Pero, ¿qué pasa si en lugar de números de cuatro cifras lo intentamos con otros?, pues que el misterio aumenta: Si se prueba con los números de dos dígitos no se llega nunca a un número fijo, sino a un bucle cíclico del tipo 9→81→63→27→45→9→81→63→27→45→9…

Con tres dígitos se llega siempre a 495. Para cuatro dígitos el número es el mencionado 6174. Para cinco dígitos, no hay número fijo, sino tres ciclos (además de distinta longitud). Para seis dígitos, se puede llegar al 549945, al 631764 o a un ciclo de siete números. Para siete dígitos tampoco hay número fijo, sino un único ciclo de nueve números. Para ocho y nueve hay otro par de números en cada caso. Para ocho: 63317664, 97508421 y para nueve: 554999445, 864197532. Con diez dígitos se puede llegar a tres valores distintos: 6333176664, 9753086421, 9975084201, o entrar en cinco ciclos cortos.

Alguien se entretuvo en programar un ordenador para calcular hasta 15 dígitos, con los que se puede llegar a ocho resultados: dos números fijos o seis ciclos cortos.

Nota curiosa: todos los números anteriores, tanto los “valores fijos”: 495, 6174, 549945… como los números de los ciclos: 09, 81, 63, 27, 45, …cumplen que sumando sus cifras y reduciendo se obtiene siempre el mismo resultado: 459: 4+5+9=18; 1+8=9

6174: 6+1+7+4=18; 1+8=9;
6333176664: 6+3+3+3+1+7+6+6+6+4=45; 4+5=9.

Los creyentes en el poder mágico de los números tienen mucho que pensar.

De todos los 8991 números de cuatro cifras (de 1000 a 9999 menos los nueve que tienen las cuatro cifras iguales), uno, el 6174 se obtiene sin repetir el proceso. 356 llevan a 6174 tras una repetición, 519 tras dos, 2124 tras tres, 1124 tras cuatro, 1379 tras cinco, 1508 tras seis y los 1980 restantes llegan tras siete.

Pero no sólo existe la constante de Kaprekar, también existen los números de Kaprekar: (sin palabras) 703^2 = 494.209; 494 + 209 = 703. 2728^2 = 7.441.984; 744 + 1.984 = 2728.

Tres problemas fáciles



1.- L'encarregat del zoo em va comentar l'altre dia que:

a) Mengen tant 17 óssos com 170 ximpanzés.

b) Mengen tant 100 000 ratolins com 50 ximpanzés

c) Mengen tant 4 elefants com 10 óssos

Quants ratolins calen per acabar amb el menjar de 12 elefants?

2.- Sumando el día que era el último lunes del mes pasado con el día del primer jueves del mes que viene, suman 38. Si estas fechas son del mismo año, ¿en qué mes estamos?
Pista: el primer jueves del mes tiene que ser 7 o menos.

3.- Separa 45 monedas en cuatro montones, de modo que si:
- sumaras dos a la primera
- restaras dos a la segunda
-duplicaras la tercera
-hicieras la mitad de a cuarta
obtendrías las mismas cantidades.

Tres problemas un poco difíciles

1. Coloque nueve cifras diferentes (vale el 0) en un cuadro 3×3 de modo que los números formados en las tres filas, las tres columnas y las dos diagonales sean múltiplo de 11. En realidad nos apetecía pedir que sean múltiplo de 11 leídos en los dos sentidos (dcha a izada e izda a dcha, abajo a arriba y arriba abajo y lo mismo para las dos diagonales), entonces la solución sería:

2	7	5
8	0	3
6	4	9

Pero nos conformamos con leerlos sólo en el sentido natural, y que la solución no sea una transformación de la mostrada.

2.- Otro de coloca números. Con las cifras de 0 a 8 -sin repetir- construya tres números de tres cifras que sumen 1989 de modo que la suma de las tres cifras de cada uno de esos tres números sea la misma.

3.- A rich merchant had collected many gold coins. He did not want anybody to know about them. One day, his wife asked, "How many gold coins do we have?" After pausing a moment, he replied, "Well! If I divide the coins into two unequal numbers, then 47 times the difference between the two numbers equals the difference between the squares of the two numbers." The wife looked puzzled. Can you help her by finding out how many gold coins they have?
Pista: $(a + b)\,(a - b) = \ldots$

Envíanos tus respuestas y participarás en nuestros sorteos. Recuerda nuestras direcciones:
materranya@yahoo.es
http://www.catedu.es/materranya
http://materranya.iespana.es