BOLETÍN DE MATEMÁTICAS DEL I.E.S. MATARRAÑA – Número 21 – SEPTIEMBRE 2.010

LEY DEL ENFRIAMIENTO DE NEWTON

El nombre de Isaac Newton (1643?-1727) está unido a sus numerosas contribuciones a la ciencia. Todos lo asociamos a sus leyes del movimiento o a la gravitación universal. Pero aquí vamos a hablar de otra de sus leyes, la del enfriamiento. Isaac Newton era el responsable de supervisar la calidad de las monedas acuñadas por la Casa de la Moneda de Inglaterra. Probablemente por ello se interesó por la temperatura, el calor y el punto de fusión de los metales.

Newton observó que al calentar al rojo un bloque de hierro y tras retirarlo del fuego, el bloque se enfriaba más rápidamente al principio y más despacio después. Por eso, esta ley podría enunciarse así: “la velocidad a la que se enfría un cuerpo es proporcional a la diferencia entre la temperatura del objeto y la temperatura del entorno.”

Para quienes tengan un conocimiento suficiente de cálculo diferencial, la expresión es la siguiente:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_A) \quad (1)$$

donde *T(t)* es la temperatura en un instante cualquiera, T_A es la temperatura ambiente y k una constante que define el ritmo de enfriamiento, pues no es igual para todos los materiales –como sabemos, algunos se enfrían o calientan más rápido que otros. Sin entrar en demostraciones, pero que el lector puede intentar, la expresión anterior lleva a otra más manejable a nuestro propósito: Sean T_0 la temperatura inicial del objeto, T_A la temperatura ambiental y *T(t)* la temperatura del objeto según va pasando el tiempo, entonces:

$$T(t) - T_A = \left(T_0 - T_A\right) \cdot e^{-k \cdot t} \quad (2)$$

Esta fórmula tiene muchas aplicaciones, veamos una que puede parecer bastante curiosa: el cálculo del tiempo que lleva muerto un cadáver. Para un cuerpo humano el valor de k es 0’5207. Por tanto, si se halla un cadáver cuya temperatura es de 30ºC en una habitación donde la temperatura es de 20º, entonces:

$$30 - 20 = \left(37 - 20\right) \cdot e^{-0'5207 \cdot t}$$

donde se ha supuesto que la temperatura inicial del fallecido era de 37ºC. Con ello queda:

$$10 = 17 \cdot e^{-0'5207 \cdot t}$$

$$e^{-0'5207 \cdot t} = \frac{10}{17} = 0'5882$$

y usando los logaritmos:

$$-0'5207 \cdot t = \ln 0'5882 = -0'530688$$

por tanto: $t = \dfrac{-0'530688}{-0'5207} = 1'019$

y se puede afirmar que la persona murió hace 1’019 horas, poco más de 61 minutos.

Obtener la expresión (2) a partir de la (1) es sencilla. Partiendo de $\dfrac{dT}{dt} = -k(T - T_A)$

Se integra: $\displaystyle\int_{T_0}^{T} \frac{d\tau}{\tau - T_A} = -k \int_{t_0}^{t} dt$

llegando a $\ln \dfrac{T - T_A}{T_0 - T_A} = -k \cdot (t - t_0)$

y tomando exponenciales:

$$T - T_A = (T_0 - T_A) \cdot e^{-k \cdot (t - t_0)}$$

LOS AXIOMAS Y LAS CURVAS DE PEANO.

Si preguntamos qué son los números naturales, posiblemente la mayoría de las respuestas sea que los naturales son el uno, el dos, el tres, etcétera. Pero esto responde a cuáles son, no qué son. Por otro lado, ¿existe una linea que pueda cubrir enteramente una superficie?

Richard Dedekind intentó establecer qué son los números naturales basándose en las ideas de la teoría de conjuntos que por entonces desarrollaba Georg Cantor, pero fue el matemático italiano Giuseppe Peano (1858-1932) quien, en 1889, proporcionó una definición del conjunto de números naturales mediante cinco axiomas, (en lógica y matemáticas, un axioma es un enunciado que se acepta sin demostración) utilizando tres conceptos: «uno», «número» y la relación binaria «ser siguiente de».

Giuseppe Peano (1858-1932)

Los axiomas de Peano dicen lo siguiente: N, el conjunto de los números naturales, es el que cumple:

1. El número *"1"* está en N.
2. Si un número n está en N, entonces su *siguiente*: $n+1$, también.
3. El número *"1"* no es *siguiente* de ningún otro número.
4. Si el *siguiente* de n y el *siguiente* de m son iguales, entonces n y m son iguales.
5. Si un conjunto de números S cumple que:
   a) contiene al *"1"* y
   b) si un número está en S, entonces su siguiente, también.

   Entonces, S es todo el conjunto N.

Como se ha dicho, un axioma es algo que estamos dispuestos a aceptar sin demostración previa. Sobre le primer axioma hay poco que decir: el número uno es un número natural. Peano construye el conjunto de los naturales basándose en la idea de *siguiente*. Por el segundo axioma, si un número está en N, entonces su *siguiente* también: como hemos aceptado que el 1 es natural, el 2 también, y por tanto el 3, el 4, el 5 y así, lo que introduce, además, el concepto de *orden*: los naturales están ordenados. Pudiera parecer que esto es suficiente, pero no es así. El axioma tercero indica que los naturales comienzan en el 1. El cuarto axioma encierra un significado que, aunque parece obvio, es indispensable: no hay dos números naturales iguales.

El quinto axioma es el llamado *Axioma de Inducción* y se utiliza para distinguir conjuntos que no son el de los naturales. Tal vez esta última frase no sea muy clara, por ello vamos con un ejemplo. Ya que este es el boletín número 21, un número triangular, demuéstrese que:

$$1+2+3+...+n=\frac{n\cdot(n+1)}{2} \qquad (1)$$

es cierta para cualquier número natural n.

Para empezar planteémonos para qué números naturales la expresión anterior es cierta. Si $n=1$,

$$1=\frac{1\cdot(1+1)}{2}$$

Si $n=2$: $$1+2=\frac{2\cdot(2+1)}{2}$$

Si $n=3$; $$1+2+3=\frac{3\cdot(3+1)}{2}$$

Sea A el subconjunto de números naturales que cumplen la igualdad (1). Si A cumple el axioma de inducción, podremos asegurar que A=N y que la expresión (1) es cierta para cualquier número natural.

Veamos que se cumple la propiedad 5a): que A contiene a "1" ya lo hemos visto.

Veamos 5b): Si un número está en A, entonces su siguiente también. Si k está en A, se cumple que $1+2+3+...+k=\frac{k\cdot(k+1)}{2}$, ¿$k+1$ está en

A?. Si podemos asegurar que es así, que *k+1* está en A, el quinto axioma nos asegurará que A es todo N.

¿*k+1* está en A? Tenemos que ver que

$$1+2+3+...+k+(k+1)=\frac{(k+1)\cdot\left((k+1)+1\right)}{2}$$

Pero sabemos que $1+2+3+...+k=\frac{k\cdot(k+1)}{2}$, por tanto

$$1+2+3+...+k+(k+1)=\frac{k\cdot(k+1)}{2}+(k+1)=$$

Sacando factor común *k+1*

$$\frac{k\cdot(k+1)}{2}+(k+1)=(k+1)\cdot\left(\frac{k}{2}+1\right)$$

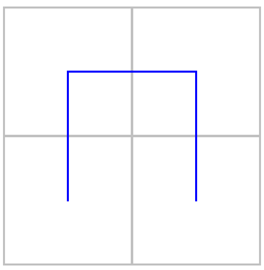
Esta última expresión puede escribirse como:

$$(k+1)\cdot\left(\frac{k}{2}+1\right)=\frac{(k+1)\cdot(k+2)}{2}$$

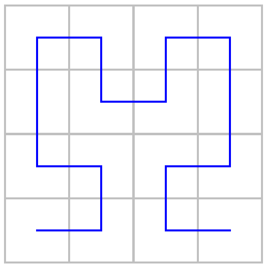
que es a lo que queríamos llegar ,por tanto A=N y la expresión (1) es cierta para todos los naturales.

Por otro lado, Peano fue el primero en notar que se pueden definir curvas que llenen áreas completas, curvas que ahora se llaman "Curvas de Peano". La construcción de dichas curvas puede realizarse mediante diversos métodos. Veamos uno:

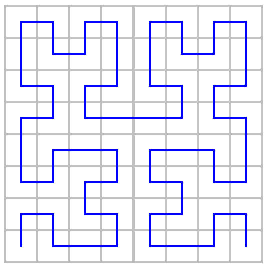
1. Se parte inicialmente de un cuadrado unidad al que se le hacen cuatro subdivisiones iguales. Después, se unen los centros de cada subdivisión con una línea de forma que se vayan recorriendo subdivisiones contiguas en todo momento. La figura de abajo indica un ejemplo de recorrido inicial.



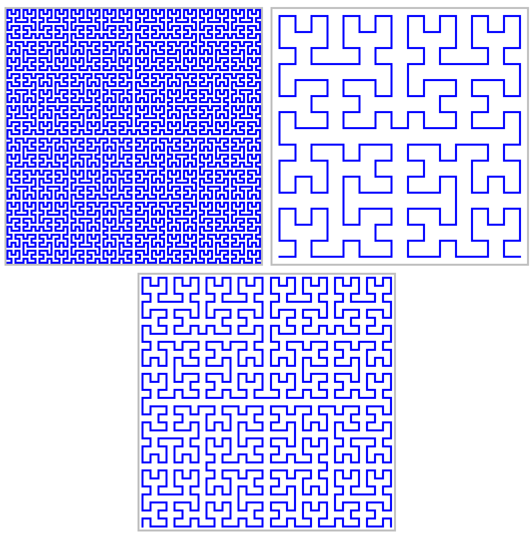
Una vez hecho esto, a cada una de las divisiones del cuadrado se le aplica el mismo procedimiento que al cuadrado anterior, de modo que se tienen otras cuatro subdivisiones por cada división anterior. El recorrido se hace de forma análoga (siempre recorriendo subdivisiones contiguas), pero además se deben recorrer primero las subdivisiones de la primera subdivisión del recorrido anterior y continuar por las de la subdivisión siguiente, de este modo:



Así, estas transformaciones se van aplicando sucesivamente para cada una de las subdivisiones obtenidas en cada etapa, de forma que en la etapa n-ésima se obtiene una serie de 4^n subdivisiones recorridas en un orden establecido de forma que recubren sucesivamente las subdivisiones de la etapa anterior. Tras la tercera etapa, resulta:



Con un valor de *n* suficientemente grande, el área de las subdivisiones hechas tiende a 0, y la curva trazada tiende a ocupar toda la superficie del cuadrado, de modo que se consigue rellenar la superficie. A esta curva se la conoce también como curva de Peano binaria (por cada cuadrado se obtienen 2x2 subdivisiones). A continuación aparecen las siguientes tres etapas:



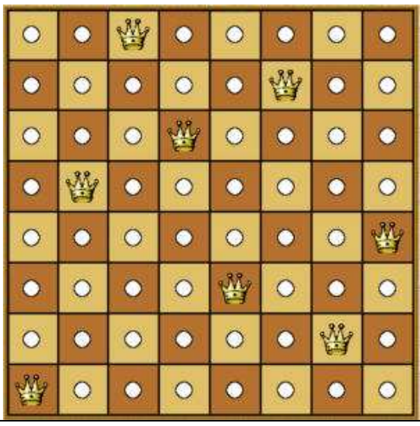
Tres problemas fáciles

1.- Sustituye los huecos por alguna de las operaciones básicas (+, -, x, :) para que se cumplan la igualdades.

a)	35 □ 2 □ 7	= 10
b)	42 □ 6 □ 3	= 10
c)	45 □ 5 □ 6 □ 5	= 10

2.- Tengo una moneda cuyo perímetro, en centímetros, mide lo mismo que su área en centímetros cuadrados. ¿Cuál es su radio?

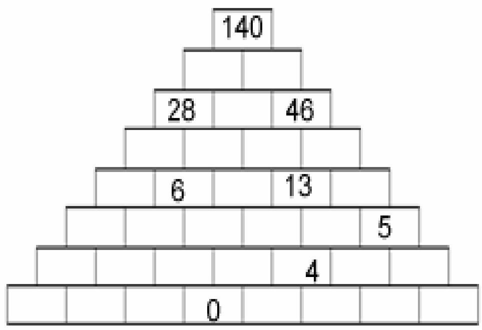
3.- Coloca sobre un tablero de ajedrez, 8 damas de tal manera que no se "coman" (Recuerda que se pueden mover en horizontal, vertical y diagonal tantas casillas como se desee). Aquí te ponemos un ejemplo, busca otros. En total hay 12 maneras diferentes.



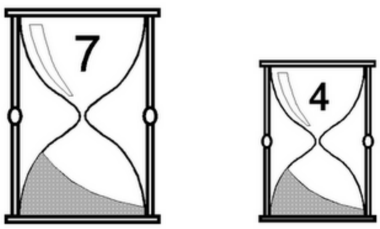
Tres problemas un poco difíciles

1. Hoy nuestro desayuno está muy caliente: a 70ºC. Al cabo de 10 minutos la temperatura ha bajado a 55ºC. ¿Cuánto tendremos que esperar si queremos beberlo a 45ªC?

2.- Rellenar esta pirámide de números sabiendo que cada casilla es la suma de las dos que tiene debajo.



3.- Tienes dos relojes de arena. Uno de 4 minutos y otro de siete minutos. Se quieren medir exactamente 9 minutos. ¿ Qué se debe hacer?



Cerramos nuestro boletín número 21 con dos curiosidades:

La suma de los puntos de un dado normal es 21.

Si las diez últimas cifras de un número al cuadrado siguen el patrón *ababababab,* entonces *ab* es 21, 61 u 84. Quien quiera, puede comprobarlo, pero le diremos que el menor número cuyo cuadrado sigue este patrón es 508.853.989.

Envíanos tus respuestas y participarás en nuestros sorteos. Recuerda nuestras direcciones:

materranya@yahoo.es

http://www.catedu.es/materranya

http://materranya.iespana.es