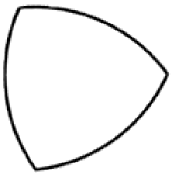
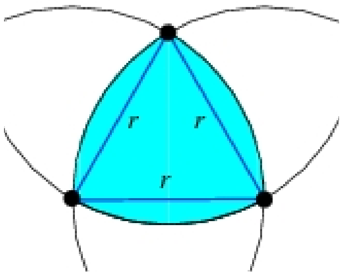
BOLETÍN DE MATEMÁTICAS DEL I.E.S. MATARRAÑA – Número 22 – OCTUBRE 2.010

ALCANTARILLAS, BROCAS Y RUEDAS



¿Por qué la tapa de una alcantarilla es circular? Porque si tuviera otra forma, por ejemplo rectangular, la tapa podría caer dentro de la alcantarilla. ¿Es el círculo la única forma que puede tener dicha tapa para no caer dentro? Muchas personas estarían dispuestas a decir que sí. Veamos si al acabar de leer este artículo el lector sigue pensando que sí.

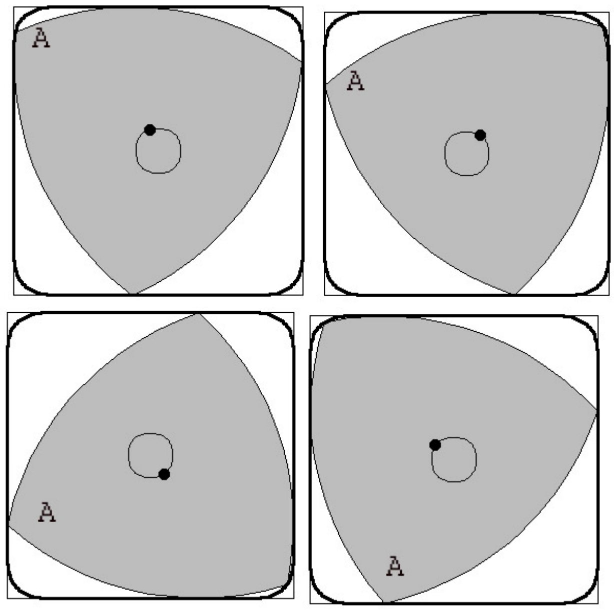
Construyamos la siguiente "alcantarilla": A partir de un triángulo equilátero de lado *r*, se dibuja el arco de circunferencia que con centro en un vértice une los otros dos vértices. Se repite desde cada vértice y esto es lo que se obtiene:



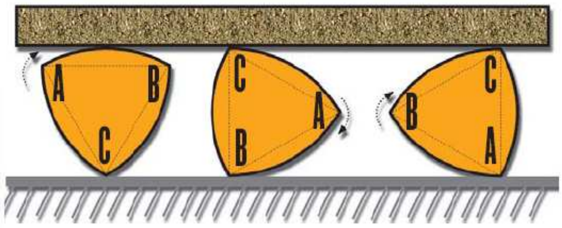
Esta figura curva se llama triángulo de Reuleaux. Evidentemente, la distancia entre cualquier punto de la curva y el vértice opuesto es la misma: *r*, por eso se dice que tiene ancho constante. Así pues, una tapa de alcantarilla de esta forma nunca se colaría por el hueco. ¿Y qué ocurre con los botones?, un botón con esta forma tampoco se saldría nunca de su ojal, salvo que, como ocurre con los botones circulares, el ojal se estire ligeramente para dejarles salir.

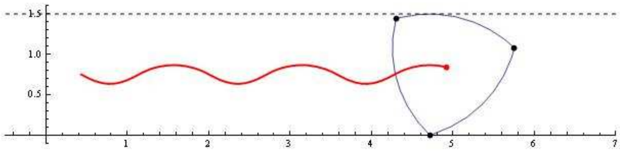
Fotografía de alcantarillas Reuleaux en San Francisco(California)

Pero tiene más propiedades: Una broca con forma de triángulo de Reuleaux puede taladrar un agujero con una forma casi como un cuadrado perfecto. Observa cómo, al girar cubre un 99% del área de un cuadrado, con las esquinas ligeramente redondeadas, permitiendo la realización de tan peculiar agujero. Hay un problema: la broca debe tener el eje descentrado, lo cual hace que esta describa un pequeño círculo en cada rotación.

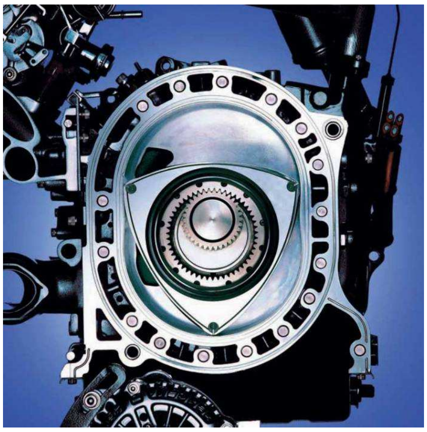


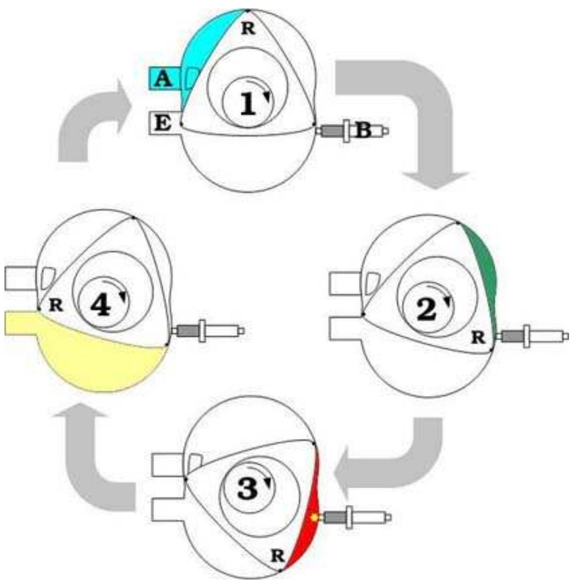
La rueda "funciona" porque su *radio* es constante: el eje que atraviesa su centro se mantiene siempre a la misma distancia del suelo. Como el triángulo de Reuleaux también tiene anchura constante, también serviría de rueda (mejor, de rodillos sobre los que arrastrar un objeto). Pero con el mismo problema que el taladro, el eje no es constante sino que rota, por lo que si la superficie móvil se apoya sobre las ruedas, el movimiento de estas no se notaría, pero si se apoya en el eje (como ocurre en el coche) se apreciaría una leve oscilación.



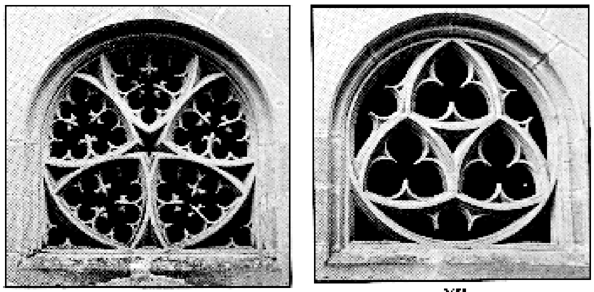


Además, piezas de este tipo se usan en motores de rotación Wankel:





Muy cerca de Friburgo, en Suiza, está la abadía cisterciense de Hauterive, fundada en 1138. El claustro gótico, construido entre 130 y 1328, tiene una Hermosa colección de ventanas circulares que son lecciones de geometría. Aquí tienes fotografías de la cuarta y la duodécima:



IV XII

Y tal vez conozcas estos chicles:

Hay infinitas curvas de anchura constante; obtendríamos el mismo resultado si en lugar de un triángulo equilátero partiéramos de un polígono regular. Las monedas británicas de veinte y cincuenta peniques tienen siete lados curvos; cuando se las hace rodar se deslizan suavemente, sin extraños botes.

Franz Reuleaux (1829 – 1905), ingeniero mecánico alemán, fue miembro de la Berlin Royal Technical Academy, de la que llegaría a ser presidente. A menudo se le considera el padre de la cinemática; fue uno de los líderes en su profesión y contribuyó en diferentes áreas de la ciencia y el conocimiento técnico. Profesor y especialista en cinemática, supo combinar durante toda su vida su interés docente con sus ideas investigadoras para diseñar y describir máquinas. Su maravillosa colección llegó a tener hasta 800 mecanismos que usó para enseñar, para sugerir nuevos avances técnicos.

NÚMEROS ABUNDANTES Y PERFECTOS

Un número es abundante cuando sumando todos sus divisores propios (todos sus divisores salvo él mismo), se obtiene una cantidad mayor que el propio número. 12 es el primer "número abundante", sus divisores (salvo él mismo) son 1, 2, 3, 4 y 6. La suma de estos es 16. Como es mayor que 12, es un número abundante. 15, por el contrario, no lo es. Sus divisores son 1,3 y 5, que suman 9. De un número así, se dice que es deficiente.

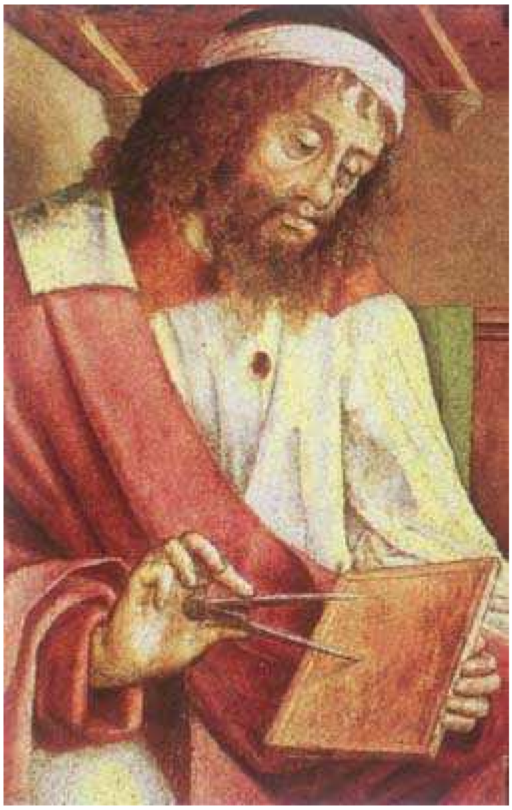
Los primeros números abundantes son los siguientes: 12, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 42, 48, 54, 56, 60, 66, 70, 72, 78, 80, 84, 88, 90, 96, 100, 102, …

La abundancia de un número abundante es la diferencia entre lo que suman sus divisores (salvo él) y el propio número. Así la abundancia del 12 es 16 – 12 = 4. Un número perfecto es aquel cuya abundancia es cero. Es decir, es un número cuyos divisores (salvo él mismo) suman lo mismo que el número. El menor número perfecto es 6. Sus divisores son 1,2 y 3 que suman 6. Los siguientes números perfectos son 28, 496 y 8128.

Los números naturales fueron clasificados por primera vez como deficientes, perfectos o abundantes por Nicómaco de Gerasa en su *Introductio Arithmetica*.

Marc Deléglise

¿Por qué se llaman números abundantes? ¿Realmente lo son? ¿Cuántos hay? No se sabe con exactitud cuántos hay, pero sí se sabe que son abundantes entre el 24'74% y el 24'80% de los números naturales. Este hecho lo demostró Marc Deléglise en 1998. Por ello nombre de *abundantes*, tal vez, no está bien elegido. Más que a la cantidad o densidad de estos, se refiere al número de divisores que el número posee. Por eso algunos autores llaman a estos números *excesivos* y no abundantes. Los números deficientes se llaman también *defectivos*.



Euclides

El matemático Euclides descubrió que los cuatro primeros números perfectos vienen dados por la fórmula :$2^{n-1} \times (2^n - 1)$.

- $n = 2$: $2^1 \times (2^2 - 1) = 2 \times 3 = 6$
- $n = 3$: $2^2 \times (2^3 - 1) = 4 \times 7 = 28$
- $n = 5$: $2^4 \times (2^5 - 1) = 16 \times 31 = 496$
- $n = 7$: $2^6 \times (2^7 - 1) = 64 \times 127 = 8128$

Al darse cuenta que $2^n - 1$ es un número primo en cada caso, Euclides demostró que la fórmula $2^{n-1} \times (2^n - 1)$ genera un número perfecto par siempre que $2^n - 1$ sea primo. Viendo estos números perfectos, los matemáticos antiguos conjeturaron que los números perfectos podían acabar alternativamente en 6 y 8. Además, a la vista del número de cifras, se plantearon si los siguientes tendrían 5, 6, 7… cifras. El quinto número perfecto es 33550336 tiene 8 dígitos, el sexto es 8589869056 con lo que ambas conjeturas se demostraron falsas. Pero sí es cierto que, en base 10, todo número perfecto acaba en 6 u 8.

Es cierto que si $2^n - 1$ es primo, entonces $2^{n-1} \times (2^n - 1)$ es perfecto. Pero el recíproco no es necesariamente cierto. Los números primos generados por la fórmula $2^n - 1$ se conocen como números primos de Mersenne, en honor al monje del siglo XVII Marin Mersenne. Posteriormente, en el siglo XVIII, Leonhard Euler demostró que todos los números perfectos pares se generan a partir de la fórmula descubierta por Euclides.

Marin Mersenne

No se conoce la existencia de números perfectos impares. Sin embargo, existen algunos resultados parciales al respecto. Si existe un número perfecto impar debe ser mayor que 10^{300}, debe tener al menos 8 factores primos distintos (y al menos 11 si no es divisible por 3). Uno de esos factores debe ser mayor que 10^7, dos de ellos deben ser mayores que 10.000 y tres factores deben ser mayores que 100.

Existen infinitos números abundantes pares e impares (el abundante impar más pequeño es 945).

Cualquier múltiplo de un número perfecto es abundante, y cualquier múltiplo de un número abundante es abundante. También, cualquier entero mayor que 20.161 puede ser escrito como la suma de dos números abundantes.

Número *semiperfecto*: todo número natural que cumple que es igual a la suma de algunos de sus divisores propios. Por ejemplo, 18 es semiperfecto ya que sus divisores propios son 1, 2, 3, 6, 9 y se cumple que 3+6+9=18.

Un número abundante que no es un número semiperfecto se llama número extraño; y un número abundante con abundancia 1 se llama número *quasiperfecto*.

Todos los números primos son defectivos, y también lo son las potencias de los números primos y los divisores propios de los números defectivos y perfectos.

Observemos el par 220, 284. Los divisores propios de 220 son 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55 y 110, que suman 284. Los divisores propios de 284 son 1, 2, 4, 71 y 142, que suman 220. Números así se dice que son *amigos*. Se puede decir que el número perfecto es un número amigo de sí mismo.

Tabit ibn Qurra

Alrededor del año 850, Tabit ibn Qurra descubrió una fórmula general para la cual se podían hallar números amigos: si se elige un número n natural mayor que 1 y se calculan

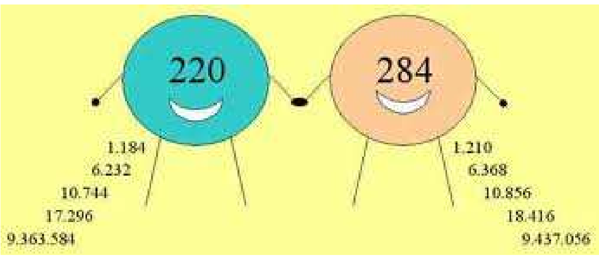
$p = 3 \times 2^{n-1} - 1$,
$q = 3 \times 2^{n} - 1$,
$r = 9 \times 2^{2n-1} - 1$,

p, q, y r son números primos, entonces $a=2^{n}pq$ y $b=2^{n}r$ son un par de números amigos.

Esta fórmula genera los pares (220, 284), (1184, 1210), (17.296, 18.416) y (9.363.584, 9.437.056). El par (6232, 6368) también es de números amigos, pero no se puede hallar por la fórmula anterior.

n	P	q	r	a	b
2	11	5	71	220	284
3	23	11	287	-	-
4	47	23	1151	17296	18416
5	95	-	-	-	-
6	191	95	-	-	-
7	383	191	73727	9363584	9437056

En la Edad Media, se creía que si se daba de comer a dos personas, al mismo tiempo pero en diferente lugar, sendos alimentos que contenían una inscripción 220 para uno y de 284 para el otro, entonces se volvían amigos por arte de magia.



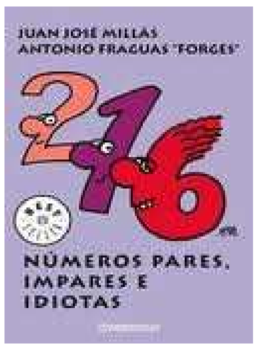
El concepto de **número sociable** es la generalización de los conceptos de números amigos y números perfectos. Un conjunto de números sociables es una colección de números en que cada número es igual a la suma de los divisores propios del anterior. De modo que los divisores propios del último suman el primero. No se conocen, por el momento, grupos de tres números sociables.

Un ejemplo con período 4:
La suma de los divisores propios de 1.264.460 es 1.547.860.
La suma de los divisores propios de 1.547.860 es 1.727.636.
La suma de los divisores propios de 1.727.636 es 1.305.184.
La suma de los divisores propios de 1.305.184 es 1.264.460.
Aquí hay otro de cinco términos:
12 496 → 14 288 →15 472 → 14 536 → 14 264 → 12 496.

Otro tipo de números relacionados con los perfectos y los abundantes: **Número ambicioso**: todo número que cumple que la secuencia que se forma al sumar sus divisores propios, después los divisores propios del resultado de esa suma, después los del número obtenido…acaba en un número perfecto. Por ejemplo, 25 lo es, ya que sus divisores propios son 1 y 5 y se cumple que 1+5=6, que es un número perfecto.

Número intocable: todo número natural que no es la suma de los divisores propios de ningún número. Por ejemplo, los número 52 y 88 son números intocables.
Número raro: todo número natural que es abundante pero que no es igual a la suma de ningún subconjunto de sus divisores propios. Por ejemplo, los número 70 y 836 son raros.

Existen otros tipos de números, pero son del ámbito de la literatura y el cine.



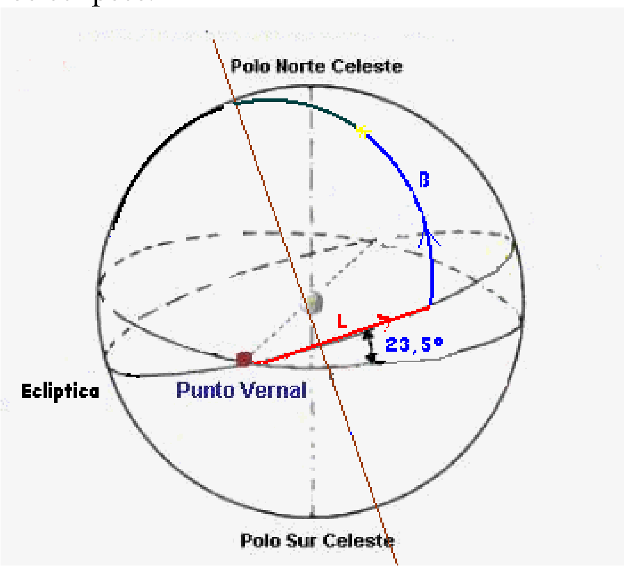
El mundo de los números es tan complicado, incomprensible y lleno de prejuicios como el de los humanos. ¿Qué pasa cuando un cuatro se parte por la mitad? Pues que en lugar de un cuatro muerto, tenemos dos doses vivos. ¿Y si le restamos uno? Nos queda un tres acomplejado [...] mientras que el dos con aspiraciones se pasa el día haciendo pesas en el gimnasio para convertirse en un tres.

Números pares, impares e idiotas
Millás y Forges

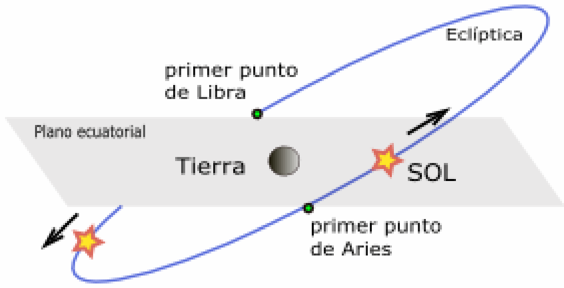
LAS ESTACIONES.

El pasado 23 de septiembre comenzó el otoño. ¿Por qué las estaciones comienzan en diferente fecha cada año?, ¿por qué empiezan en la fecha que lo hacen?, ¿por qué cada estación dura diferente número de días? Todo esto, y algo más, en este reportaje.

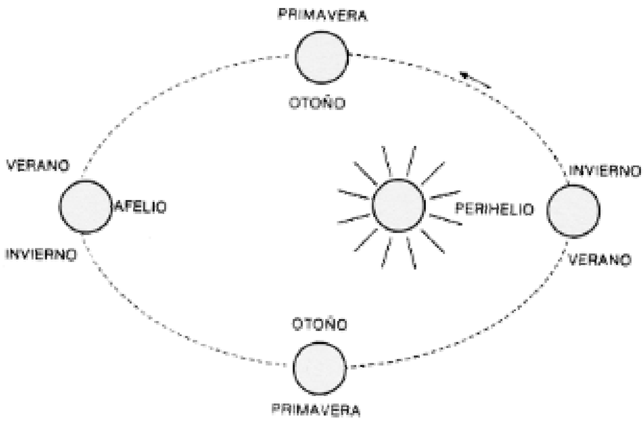
El plano de la eclíptica, o simplemente *la eclíptica*, es el plano de la órbita de la Tierra alrededor del Sol. Como explicaremos a más adelante, este plano varía con el tiempo, pero como primera aproximación nos sirve la explicación anterior. Contiene a la órbita de la Tierra alrededor del Sol y, por lo tanto, es el plano que contiene el recorrido aparente del Sol a lo largo de todo un año observado desde la Tierra. Este plano se encuentra inclinado unos 23º 27' con respecto al plano del Ecuador terrestre. Su nombre proviene del latín eclіptĭca (linĕa), y este del griego εκλειπτική, relativo a los eclipses.



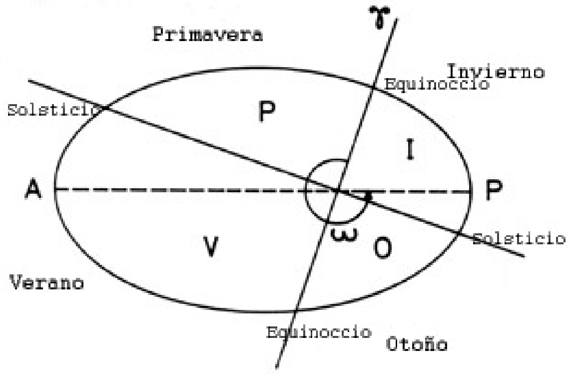
Visto desde la Tierra, al transcurrir un año, 365 ’25 días, el Sol aparenta moverse sobre la esfera celeste una vuelta completa: 360º, por tanto, casi un grado cada día. De esta manera, si imaginamos la Tierra como centro y el Sol girando a su alrededor, el plano del Ecuador terrestre sería horizontal y el de la Eclíptica, sobre el que se mueve el Sol, inclinado los mencionados 23º 27’. Estos dos planos se cortan en una recta – llamada Línea de Equinoccios-, el punto de la recta en el que el Sol en su giro aparente en torno a la Tierra cruza el plano ecuatorial de abajo a arriba se llama Punto Vernal, Punto Aries y también Punto γ (letra gamma griega). En ese momento empieza la primavera en el hemisferio norte. Como el año “real” no coincide con el de nuestro calendario, aquí tenemos una causa de que la primavera no comience todos los años en la misma fecha.



Los equinoccios son los dos puntos de la esfera celeste en que la eclíptica corta el ecuador celeste, uno es el punto vernal y el otro, su opuesto. El equinoccio vernal se produce en torno al 21 de marzo, y da paso a la primavera en el hemisferio norte y al otoño en el hemisferio sur (en este caso se denomina equinoccio otoñal). El equinoccio otoñal se produce en torno al 23 de septiembre, dando paso al otoño en el hemisferio norte y a la primavera en el hemisferio sur (en este caso se denomina equinoccio vernal).



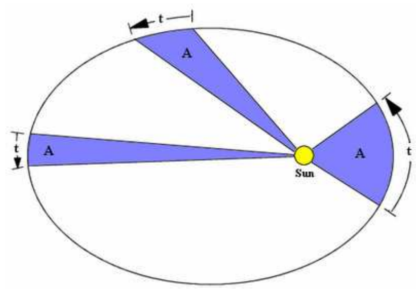
Si imaginas una elipse con la Tierra en uno de los focos y el Sol en movimiento de traslación a su alrededor – es decir, la eclíptica- y en dicha elipse imaginas la línea de los equinoccios, en el punto vernal comienza la primavera en el hemisferio norte, en el punto opuesto comienza el otoño. Si ahora trazas una perpendicular a la línea de equinoccios tendrás los puntos en los que se halla el sol cuando comienzan el verano y el invierno. Esos puntos se llaman solsticios. Los solsticios son los momentos en el que el sol alcanza su máxima posición meridional o boreal. Un Solsticio se produce alrededor del 21 de junio cada año, dando lugar al inicio del verano en el hemisferio norte y al invierno en el hemisferio sur. Y el otro alrededor del 21 de diciembre cada año, dando lugar al inicio del invierno en el hemisferio norte y al verano en el hemisferio sur. Como la trayectoria de la Tierra alrededor del Sol es una elipse, y es recorrida con distinta velocidad, el tiempo empleado en ir de un solsticio al equinoccio siguiente y luego al otro solsticio y el otro equinoccio no es el mismo. Por tanto, las estaciones no duran igual.



Hemisferio Norte	Hemisferio Sur	Duración
Primavera	Otoño	92 días 20 horas
Verano	Invierno	93 d 15 h
Otoño	Primavera	89 d 19 h
Invierno	Verano	89 d 0 h

Actualmente la línea de los solsticios forma con el eje mayor de la elipse descrita por la Tierra alrededor del Sol un ángulo de 10°. Por la Segunda ley de Kepler, la Tierra en su giro alrededor del sol barre áreas iguales en tiempos iguales. Luego cuando la Tierra está “cerca” del Sol, se traslada más deprisa que cuando está “lejos”. Esto significa que las correspondientes estaciones “cerca” del Sol –otoño e invierno del hemisferio norte- tienen menor duración.

La Tierra alcanza su máximo acercamiento al sol los días 2, 3 y 4 Enero cuando el hemisferio sur es verano. Así pues, el hemisferio norte goza, aunque en escasa proporción, de inviernos menos fríos y veranos menos calurosos que el Sur.



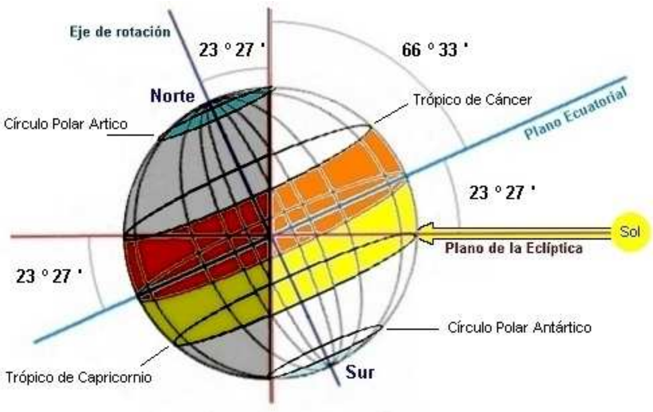
La situación esta también compensada por otro hecho no astronómico, los mares más extensos en el Sur que en el Norte acumulan calor durante el verano y las ceden durante el invierno a la atmósfera, gracias a ellos los inviernos son menos crudos y los veranos menos tórridos en el Sur de lo que podrían ser debido sólo a la insolación solar.

El retorno cíclico de las estaciones.

Las estaciones no se deben a que la órbita terrestre sea elíptica y, por ello, haya épocas de mayor cercanía al Sol. Se deba a la inclinación del eje de rotación terrestre 23º 27', este se mantiene apuntando durante todo el año hacia una región concreta de la esfera celeste cerca de la estrella Polar. Por ello, en ciertos momentos un hemisferio está más expuesto que el otro a los rayos solares. Es por esto que las estaciones varían de un extremo al otro del mundo. En las áreas mas templadas de los hemisferios norte y sur se reconocen cuatro estaciones. En los Polos Norte y Sur hay sólo dos estaciones (invierno y verano) mientras que en los países ecuatoriales y tropicales no hay estaciones sino periodos en los cuales hay sequías o lluvia.

Sobre la Tierra existen cuatro círculos imaginarios: los Trópicos (de Cáncer y Capricornio) y los Círculos Polares (Ártico y Antártico). Los trópicos están a una latitud de 23º 27’ y los círculos polares a 66º 33’, es decir, 90º - 23º 27’. El solsticio es aquel instante en que el Sol se halla en uno de los dos trópicos. Por tanto, un habitante que viva entre los trópicos verá alguna vez al año el Sol justo sobre su cabeza, fuera de los trópicos nunca ocurre esto. Y un habitante que esté entre los círculos polares y los polos, verá que hay días del año en los que no se hace de día (en invierno) y otros (en verano) en los que no se hace de noche. En las regiones cercanas al Polo

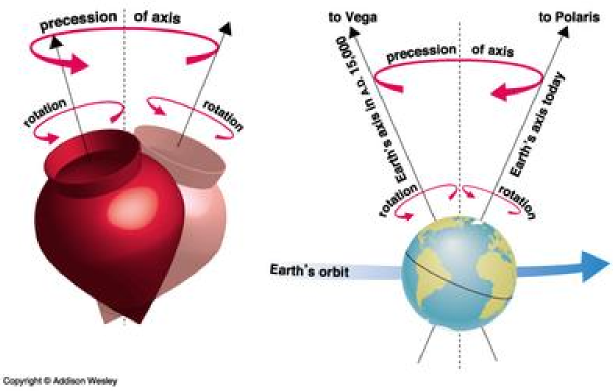
Norte, tras el comienzo de la primavera, disfrutan de unos 6 meses de luz solar continuada (sin noches) mientras que en el Polo Sur, con el comienzo del otoño, es la noche la que dura casi 6 meses. Esta situación se invierte cada medio año. En el Ecuador, día y noche siempre serán iguales durante todo el año.



La fecha de comienzo de las estaciones oscila en un periodo de dos días respecto al año trópico, entendido como el intervalo entre dos pasos consecutivos del Sol por el Punto Aries, dura 365,2422 días solares. La fracción de día (0,2422) que cada año se acumula es igual a seis horas, y cada cuatro años suma un día entero, éste se recupera en el año bisiesto, agregándolo a febrero y, por consiguiente se desplaza un día el comienzo de las estaciones siguientes.

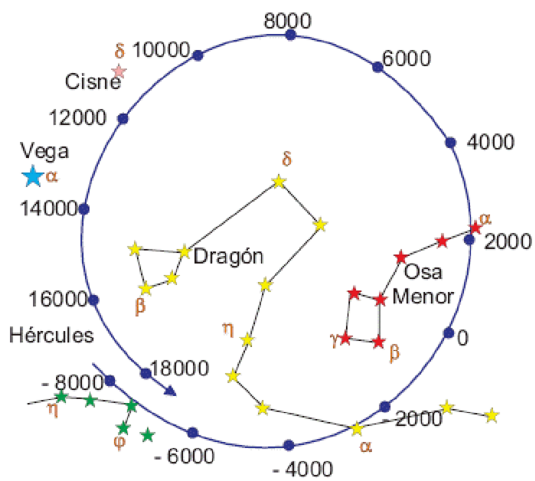
Si el 21 de Junio es el día en el que recibimos más horas de luz solar, ¿por qué se considera el comienzo del verano y no es la época de más calor? E igualmente, ¿por qué es el 21 de Diciembre, el día de menos horas de luz solar, el comienzo del invierno y no su mitad? Los responsables son océanos, que se calientan y enfrían lentamente. Para el 21 de Junio continúan fríos del invierno y esto retrasa la canícula (punta de calor) un mes y medio aproximadamente. Igualmente, en Diciembre el agua continúa templada del verano y los días más fríos serán (como media) un mes y medio más tarde.

La precesión y su efecto en las estaciones.
Los movimientos de rotación y traslación serían los únicos que la Tierra ejecutaría si ésta fuese completamente esférica, pero al ser un elipsoide de forma irregular aplastado por los polos la atracción gravitacional del Sol y de la Luna, y en menor medida de los planetas, sobre el ensanchamiento ecuatorial provocan una especie de lentísimo balanceo en la Tierra durante su movimiento de traslación. Este movimiento puede compararse con el balanceo de una peonza que, al girar su eje, oscila lentamente mientras se traslada por el espacio. Este movimiento recibe el nombre de precesión o precesión de los equinoccios.



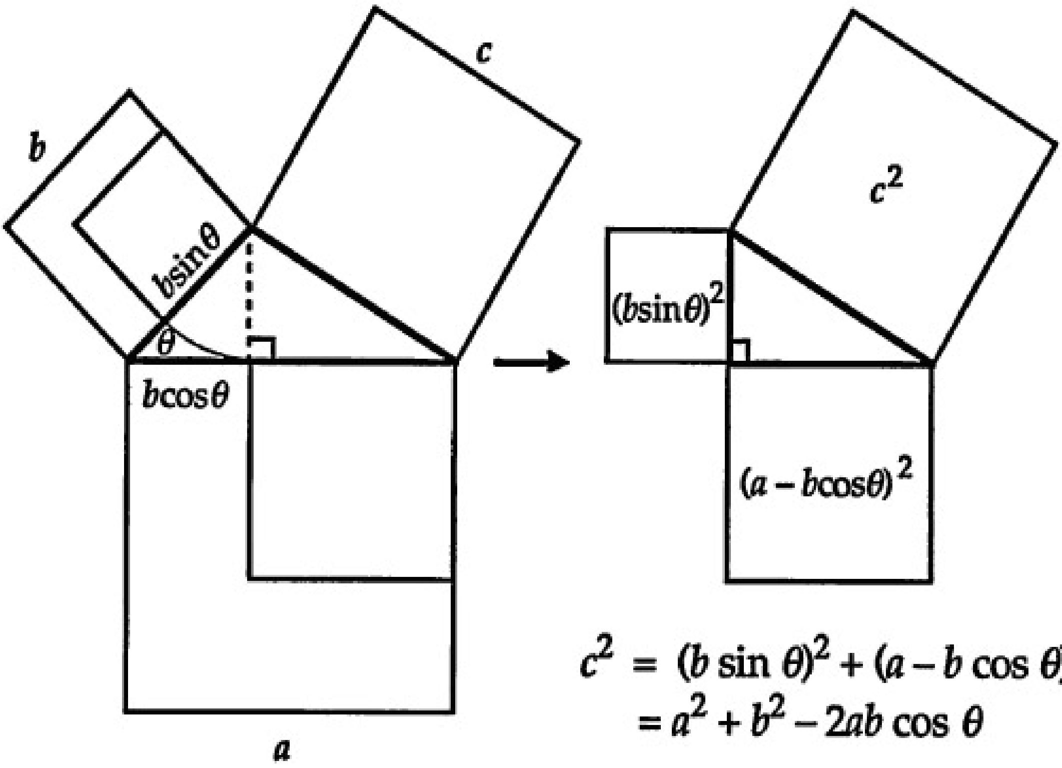
Bajo la influencia de dichas atracciones, el eje de los polos terrestres va describiendo un cono de 47º de abertura cuyo vértice está en el centro de la Tierra.

Debido a la precesión de los equinoccios, la posición del polo Norte celeste va cambiando a través de los siglos. Actualmente el Polo Norte señala hacia la estrella Polar, pero esta dirección va cambiando describiendo un inmenso círculo para volver un poco cerca de su posición actual después de transcurrir 25.765 años.

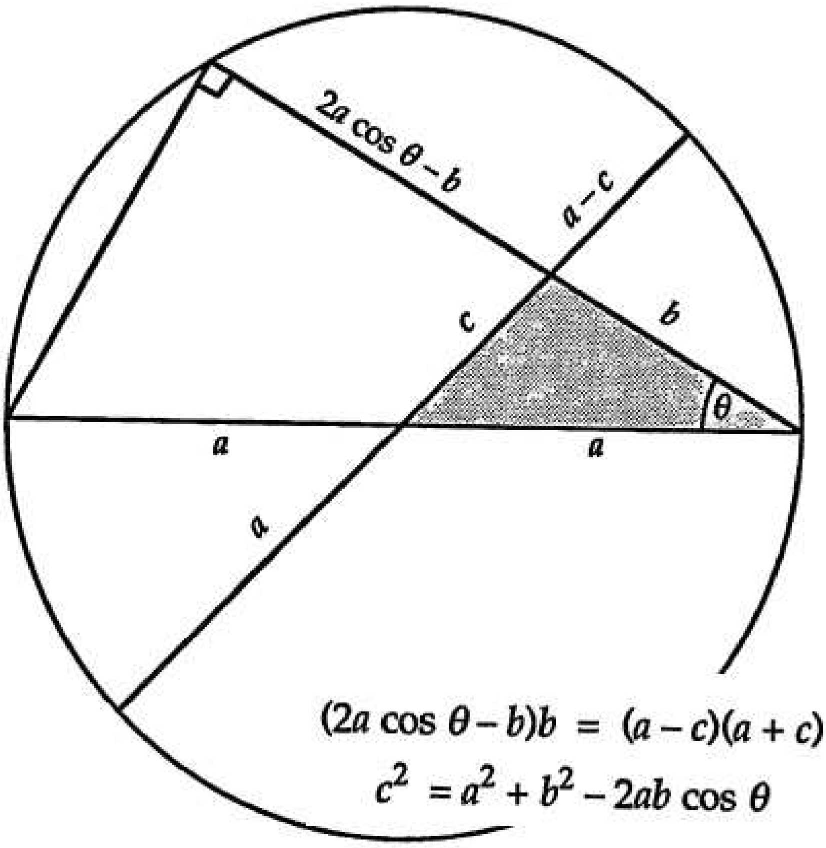


DOS DEMOSTRACIONES SIN PALABRAS DEL TEOREMA DEL COSENO

La primera es de Timothy A. Spika, la segunda de Sydney H. Kung



$$c^2 = (b \sin \theta)^2 + (a - b \cos \theta)^2$$
$$= a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta$$



$$(2a \cos \theta - b)b = (a - c)(a + c)$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta$$

Tres problemas fáciles

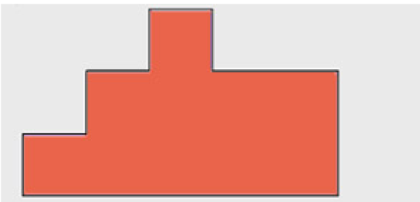
1.- Simplifica, sin calculadora, claro:

$$\frac{116.690.151}{427.863.887}$$

2.- Encuentra tres números que cumplan:

$$\frac{5}{[\quad]}+\frac{3}{[\quad]}+\frac{2}{[\quad]}=3'25.$$

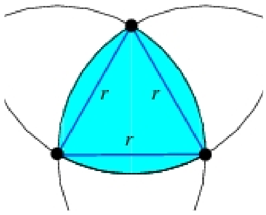
3.- Construye en cartulina cuatro piezas como esta:



y construye con ellas un rectángulo con ellas.

Tres problemas un poco difíciles

1. Si el lado del triángulo es r, calcula el perímetro del triángulo de Reuleaux y demuestra que su área es $\frac{\left(\pi-\sqrt{3}\right)\cdot r^2}{2}$.



2.- Calcula:

$$3^{1/3}\cdot 9^{1/9}\cdot 27^{1/27}\cdot\ldots\cdot\left(3^n\right)^{1/3^n}.$$

3.- Si el número de mi casa fuera múltiplo de 3, estaría entre 50 y 59. Si no fuera múltiplo de 4, estaría entre 60 y 69. Y si no fuera múltiplo de 6, estaría entre 70 y 79. ¿En qué numero vivo?

Mira qué curioso es el número **142.857**, lo vamos a escribir dos veces seguidas:

142857142857

142.857 · 1 = 142.857	**142857142857**
142.857 · 2 = 285.714	**142857142857**
142.857 · 3 = 428.571	**142857142857**
142.857 · 4 = 571.428	**142857142857**
142.857 · 5 = 714.285	**142857142857**
142.857 · 6 = 857.142	**142857142857**

¿Adivinas qué pasará al multiplicarlo por 7?

Envíanos tus respuestas y participarás en nuestros sorteos. Recuerda nuestras direcciones:

materranya@yahoo.es
http://www.catedu.es/materranya
http://materranya.iespana.es