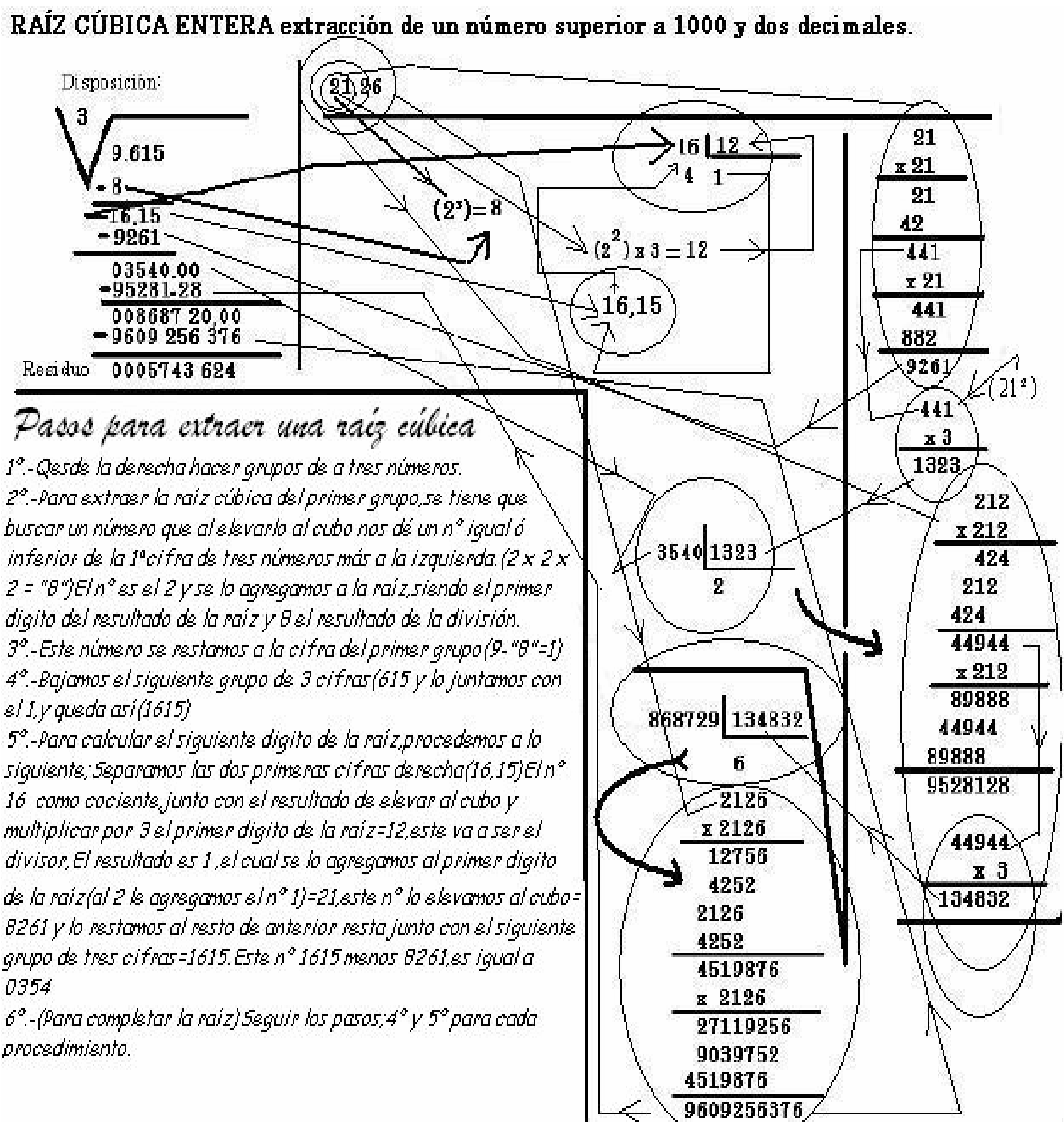
BOLETÍN DE MATEMÁTICAS DEL I.E.S. MATARRAÑA – Número 23 NOVIEMBRE 2.010

CÁLCULO DE LA RAÍZ CÚBICA DE UN NÚMERO

Esta fotografía, tomada de wikipedia, merece nuestra portada.



MÉTODO DE RESOLUCIÓN DE RAÍCES CÚBICAS.

Además del de la portada, existen diversos algoritmos de resolución de raíces cúbicas. Presentamos aquí el que posiblemente sea más sencillo, aunque la intuición y la paciencia juegan un papel importante.

Todos ellos se basan en el cubo del binomio $(a+b)^3 = a^3 + 3\cdot a^2\cdot b + 3\cdot a\cdot b^2 + b^3$. Los más sencillos son aquellos en los que más influye la intuición a la hora de determinar las cifras del resultado. Aquellos que dejan poco a la intuición pecan de farragosidad. Aprendamos el método con un ejemplo: $\sqrt[3]{6.859}$

En primer lugar se hacen grupos de tres en tres cifras desde la coma decimal hacia delante y hacia atrás y se considera el primer grupo, para nosotros es el 6. $\sqrt[3]{6\quad 859}$

Ahora se busca el mayor número cuyo cubo está por debajo del primer grupo, en este caso es el 1, restamos 1^3 y se baja el siguiente grupo:

$$\begin{array}{r|l} \sqrt[3]{6.859} & 1 \\ \hline -1^3 & \\ \hline 5.859 & \end{array}$$

Ahora viene el paso difícil. Se trata de hacer una conjetura del siguiente número. Hemos de calcular la raíz cúbica de 6.859, y el número de "residuo" que tenemos por el momento es 5.859, como es bastante cercano, la cifra que necesitamos debe ser alta. Probamos con 9. Esta es la operación que hemos de hacer:

$$\left[3\cdot\left(A^2\cdot 100 + A\cdot 10\cdot B\right) + B^2\right]\cdot B$$

Donde A es la parte del resultado que llevamos calculada y B el número que sospechamos es el siguiente. En nuestro caso A=1, B=9.

$$\left[3\cdot\left(1^2\cdot 100 + 1\cdot 10\cdot 9\right) + 9^2\right]\cdot 9 = 5.859$$

Aquí hemos acertado, si el resultado hubiera excedido a 5.859, tendríamos que intentar con otro menor. Así, $\sqrt[3]{6.859}$ =19.

Lo cierto es que nuestra raíz es exacta y que la del método de la portada extrae dos decimales, vamos a atrevernos con ella. Primero añadimos dos grupos de tres ceros tras la coma decimal y vemos que cabe a 2. Restamos 8 y bajamos el siguiente grupo

$$\begin{array}{r|l} \sqrt[3]{9.615'000.000} & 2 \\ \hline -8 & \\ \hline 1.615 & \end{array}$$

Ahora hay que probar a encintrar un B para

$$\left[3\cdot\left(2^2\cdot 100 + 2\cdot 10\cdot B\right) + B^2\right]\cdot B$$

Observamos que la primera parte es 3·4·100= 1200, luego es muy poco lo que hay que sumar, hacemos B=1 y se obtiene:

$$\left[3\cdot\left(2^2\cdot 100 + 2\cdot 10\cdot 1\right) + 1^2\right]\cdot 1 = 1.261.$$

$$\begin{array}{r|l} \sqrt[3]{9.615'000.000} & 2\ 1 \\ \hline -8 & \\ \hline 1.615 & \\ 1.261 & \\ \hline 354\ 000 & \end{array}$$

Ahora hay que probar a encontrar un B para $\left[3\cdot\left(21^2\cdot 100 + 21\cdot 10\cdot B\right) + B^2\right]\cdot B$. Observamos que la primera parte es 3·441·100=132.300, como hemos de acercarnos a 354.000, con B=2 se obtiene: $\left[3\cdot\left(21^2\cdot 100 + 21\cdot 10\cdot 2\right) + 2^2\right]\cdot 2 = 267128$

$$\begin{array}{r|l} \sqrt[3]{9.615'000.000} & 2\ 1'2 \\ \hline -8 & \\ \hline 1.615 & \\ 1.261 & \\ \hline 354\ 000 & \\ 267\ 128 & \\ \hline 86\ 872\ 000 & \end{array}$$

Ahora hay que probar a encontrar un B para que $\left[3\cdot\left(212^2\cdot 100 + 212\cdot 10\cdot B\right) + B^2\right]\cdot B$ se acerque, por debajo, a 86.872.000.

Como $3\cdot 212^2\cdot 100$=13.483.200, y se ha de llegar a 89 millones, B será 6 o 7. Probamos con B=6:

$$\left[3\cdot\left(212^2\cdot 100 + 212\cdot 10\cdot 6\right) + 6^2\right]\cdot 6 = 81.128.376$$

Con B=7, el resultado es 94.694.383, que se pasa.

Por tanto, $\sqrt[3]{6.859}$ =21'26 y el residuo es 5'743624.

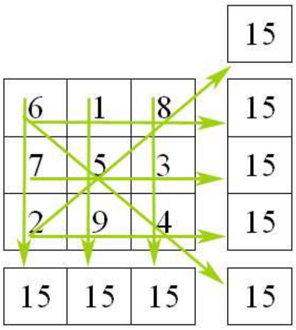
Otro ejemplo: $\sqrt[3]{16.194.277}$

$$\begin{array}{r|l} \sqrt[3]{\ 16.194.277} & 2\quad 5\quad 3 \\ \hline -2^3 & \text{Probamos el 5} \\ \hline 8\ 194 & \left[3\cdot\left(2^2\cdot 100 + 2\cdot 10\cdot 5\right) + 5^2\right]\cdot 5 = 7.625 \\ -7\ 625 & \text{Probamos el 3} \\ \hline 569\ 277 & \left[3\cdot\left(25^2\cdot 100 + 25\cdot 10\cdot 3\right) + 3^2\right]\cdot 3 = 569.277 \\ 569\ 277 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

CUADRADOS MÁGICOS

Un cuadrado mágico es, como su nombre indica, un cuadrado formado por casillas dispuestas en filas y columnas que contienen una serie de números naturales de modo que todas las filas, todas las columnas y las diagonales suman un mismo número, llamado constante mágica.

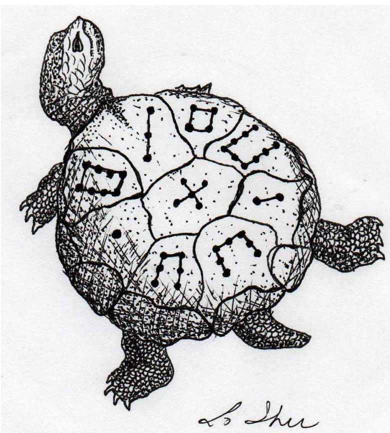
Generalmente suelen colocarse los números entre 1 y n^2, siendo n el número de filas y columnas del cuadrado. El ejemplo más sencillo es el cuadrado mágico de orden 3 (el orden es el lado del cuadrado) y los números de 1 a 9, su constante es 15:



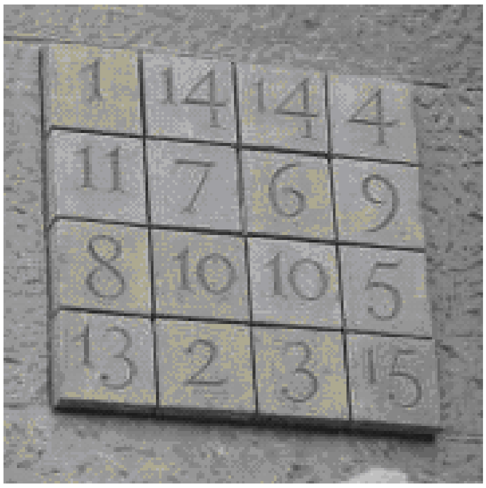
Aquí tienes otro cuadrado mágico de constante 51:

14	11	26
29	17	5
8	23	20

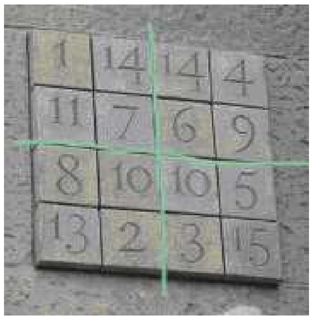
El cuadrado mágico más antiguo que se conoce es el Lo Shu, es de origen chino y, según la tradición, fue revelado a los hombres por una tortuga del río Lo que lo llevaba grabado en su cáscara. Aquí tienes una imagen adaptada:



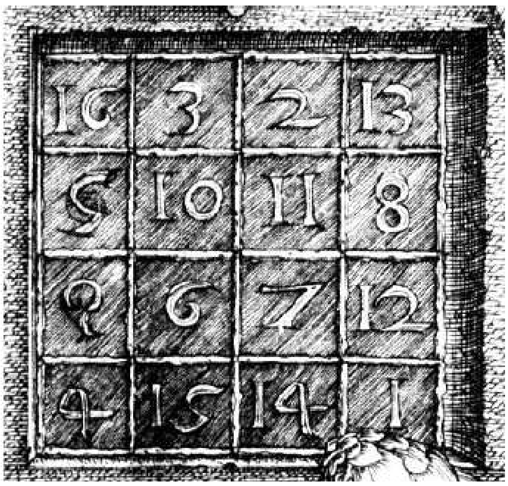
Aquí tienes otro que aparece en la fachada de la Pasión de la Sagrada Familia de Barcelona:



Su constante es 33 (la edad de Cristo en la Pasión) y, como se puede apreciar, contiene números repetidos pero a cambio sumando las cuatro esquinas, también sale 33. Y sumando las cuatro casillas centrales, también. Y también suman 33 los pequeños cuadrados 2 x 2 de cada esquina.



Aquí tienes un detalle del cuadro de Durero *"Melancolía"*:



La constante mágica de este cuadrado es 34. Además sus cuatro esquinas suman 34, los cuatro número centrales suman 34, los cuatro números centrales de las filas superior e inferior suman 34 al igual que los cuatro números centrales de las columnas izquierda y derecha. Si dividimos el cuadrado en cuatro cuadrados tenemos que los números que integran cada uno de ellos suman 34. Los números 3, 8, 14, 15 (movimiento de caballo de ajedrez a partir del 3) suman 34 al igual que el 2, 5, 15, 12. Y si reemplazamos cada número por su cuadrado o por su cubo obtenemos otros dos cuadrados que aunque no son mágicos también tienen propiedades interesantes. Este cuadrado mágico data de 1514, fecha también reflejada en el propio cuadrado en los dos números centrales de la fila inferior.

Cuadrados mágicos de orden 3 sólo hay uno (los demás pueden obtenerse rotando o reflejando este). Para los de orden 4 Frenicle De Bessy estableció en 1693 que existen 880 cuadrados mágicos. Más adelante se ha demostrado que existen 275.305.224 cuadrados mágicos de orden 5. Para órdenes más grandes sólo se tienen estimaciones. Obviamente un cuadrado mágico de orden 2 debería tener sus cuatro números iguales.

Construcción de cuadrados mágicos

Para hacer un cuadrado mágico de orden n, con la cifras $1, 2, 3, \ldots, n^2$, la constante mágica es:

$$\frac{n \cdot \left(n^2+1\right)}{2}$$

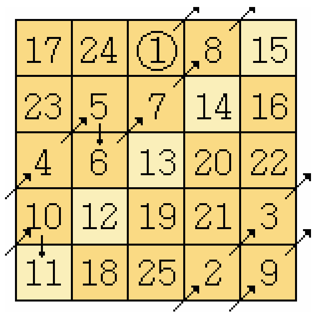
Para la construcción de cuadrados mágicos existen varios procedimientos, dependiendo del orden. Tenemos reglas para construir cuadrados de orden impar, cuadrados de orden 4k y cuadrados de orden 4k + 2.

Cuadrados mágicos de orden impar. Método de Loubere

El primer método para la construcción de cuadrados mágicos de orden impar se debe a **Loubere**. Veamos en qué consiste construyendo uno de orden 5:

Se coloca el 1 en la posición central de la fila superior y se va rellenando en diagonal ascendente, cuando se acaba el cuadro, se continua como si hubiera otro cuadro adyacente, es decir, el 2 se coloca en la posición (fila 5, columna 4), el 3 en la posición (fila 4, columna 5), luego el 4 en (fila 3, columna 1) y así sucesivamente. Cuando al intentar colocar un número en la posición que debe ocupar la encontramos ya ocupada colocamos ese número justo debajo del último que hemos colocado y continuamos colocando en diagonal.

Tal vez se entienda mejor con una imagen:

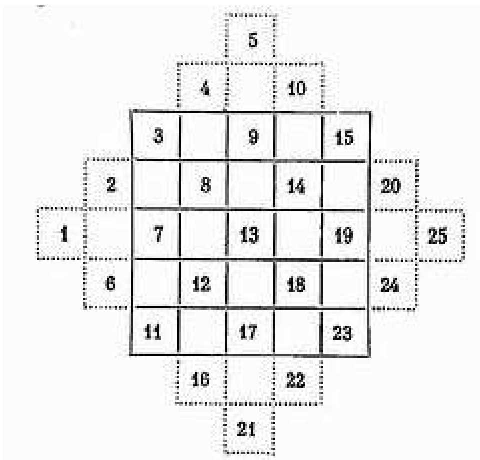


Este cuadrado mágico tiene al número 65 como constante mágica.

Cuadrados mágicos de orden impar: Método de Bachet

Otro método para construir cuadrados mágicos de orden impar es el **método de Bachet**. Veamos en qué consiste con otro ejemplo de orden 5:

Sobre un cuadrado de 5×5, se colocan los números del 1 al 25 como muestra la siguiente figura:



Ahora se llevan los números que han quedado fuera del cuadrado en las posiciones opuestas que quedaron libres. Queda el siguiente cuadrado:

3	16	9	22	15
20	8	21	14	2
7	25	13	1	19
24	12	5	18	6
11	4	17	10	23

Cuadrados mágicos de orden 4·k.

Vamos a construir un cuadrado mágico de orden 8, es decir, 4·2. Se colocan los números dispuestos de forma consecutiva. Ahora, conservando el cuadro central de orden n/2 y los cuatro de las esquinas, se giran 180º respecto al centro los números restantes se giran 180º, o, si se prefiere, se recolocan en orden decreciente.

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

1	2	62	61	60	59	7	8
9	10	54	53	52	51	15	16
48	47	19	20	21	22	42	41
40	39	27	28	29	30	34	33
32	31	35	36	37	38	26	25
24	23	43	44	45	46	18	17
49	50	14	13	12	11	55	56
57	58	6	5	4	3	63	64

Este método funciona porque, aunque en la configuración inicial las filas y columnas no suman lo mismo, sí van ganado cada vez una cantidad constante. Así si la mitad de los números de al fina 1ª se intercambian con la última, la mitad de los de la 2ª con la penúltima y así con todas y también con las columnas, la suma de los términos de cada fila y cada columna (y cada diagonal, claro) sí que es constante. Por ello, partiendo del cuadrado con los números dispuestos consecutivamente y eligiendo patrones simétricos distintos se puede obtener otros cuadrados mágicos. Por ejemplo:

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

1	63	62	4	5	59	58	8
56	10	11	53	52	14	15	49
48	18	19	45	44	22	23	41
25	39	38	28	29	35	34	32
33	31	30	36	37	27	26	40
24	42	43	21	20	46	47	17
16	50	51	13	12	54	55	9
57	7	6	60	61	3	2	64

Cuadrados mágicos de orden 4k + 2

Son los más complicados de construir. Simplemente diremos que existe un método denominado **LUX**. Consiste en dividir el cuadrado en subcuadrados 2×2 y etiquetarlos según ciertas reglas con las letras L, U y X. Después se realiza algún intercambio entre cuadrados 2×2 y luego se colocan números siguiendo en procedimiento de Loubere. Si el lector lo desea, puede encontrar explicaciones y ejemplos de este método en internet.

5.- Cuadrados mágicos de orden par

Veamos un método para resolver cuadrados mágicos de orden par, como ejemplo elegimos uno de orden 6.

Para empezar, se sitúa el número 1 en el extremo superior izquierda y después, con un desplazamiento de izquierda a derecha, se va contando y se escriben sólo las cifras correspondientes a las casillas que forman las dos diagonales.

1 >					6
	8			11	
		15	16		
		21	22		
	26			29	
31					36

A continuación, se coloca en la primera casilla inferior derecha en blanco, vecina de la del extremo, el número 2 e iremos desplazándonos hacia arriba y en zigzag para ir completando, en estricto orden, las casillas que forman las "V" interiores de las diagonales principales y las dos casillas exteriores de las filas centrales.

Es decir, colocado el 2, iremos contando de uno en uno hasta llegar a una de las casillas mencionadas, se escribe su cifra y las seguimos enumerando, si se acaba una fila subimos a la anterior y cambiamos de sentido (zigzag), hasta llegar al extremo superior izquierda.

Con esto quedaría terminado el cuadrado de orden 4, -que, por cierto, es el de Durero- pero en el de orden 6 hemos de continuar.

1	32			35	6
	8	28	27	11	
19		15	16		24
18		21	22		13
	26	9	10	29	
31	5			2	<36

Después de esto ya llevamos escritas 4n cifras, como este es de orden 6, ya llevamos 24. Nos situaremos, ahora, en el extremo superior derecho (la casilla con el 6) y con un desplazamiento siempre de derecha a izquierda, iremos contando de uno en uno y se escriben sólo los números pares en las casillas que estén vacías.

1	32	4		35	< 6
12	8	28	27	11	
19		15	16	14	24
18		21	22	20	13
30	26	9	10	29	
31	5	34		2	36

Finalmente nos situaremos en el extremo inferior derecho (la casilla con el 36) y con un desplazamiento de derecha a izquierda, se cuenta de uno en uno y se escriben sólo los números impares en las casillas vacías.

1	32	4	33	35	6
12	8	28	27	11	25
19	23	15	16	14	24
18	17	21	22	20	13
30	26	9	10	29	7
31	5	34	3	2	<36

Para acabar diremos que existe un método para cuadrados de orden impar no múltiplo de 3 basado en los saltos de caballo del ajedrez. Aquí va un ejemplo:

23	7	4	20	11
19	15	21	8	2
6	3	17	14	25
12	24	10	1	18
5	16	13	22	9

Otra curiosidad son los cuadrados mágicos pandiagonales, aquí va un ejemplo de constante 65:

19	3	12	21	10
11	25	9	18	2
8	17	1	15	24
5	14	23	7	16
22	6	20	4	13

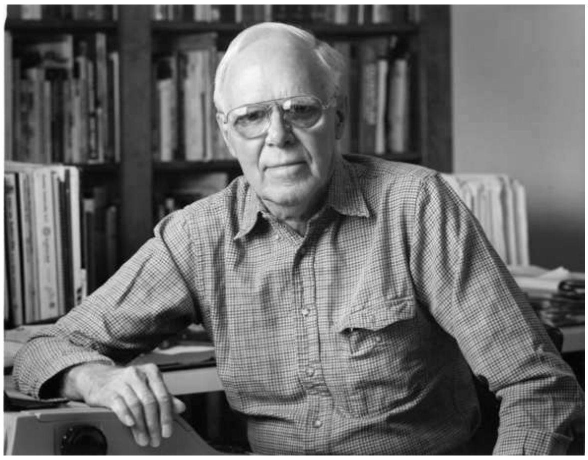
En él no sólo las diagonales suman 65, sino que todas las diagonales suman ese número. Para apreciarlo, las hemos coloreado de diferente color.

19	**3**	**12**	**21**	**10**
11	**25**	**9**	**18**	**2**
8	**17**	**1**	**15**	**24**
5	**14**	**23**	**7**	**16**
22	**6**	**20**	**4**	**13**

19	**3**	**12**	**21**	**10**
11	**25**	**9**	**18**	**2**
8	**17**	**1**	**15**	**24**
5	**14**	**23**	**7**	**16**
22	**6**	**20**	**4**	**13**

Existen muchas variantes de cuadrados mágicos, el famoso creador de acertijos Henry Ernest Dudeney, en su *Amusement in Mathematics*, reclama haber sido el primero en considerar cuadrados mágicos cuyas casillas sean números primos, el proporciona muchos resultados, pero como en esa época el 1 era considerado primo, muchos de sus resultados contienen al 1 en alguna casilla. Aceptada la convención actual de que el 1 no es primo, el único cuadrado mágico primo de orden tres, con la constante más baja (C = 177) es el mostrado en la figura 5.

17	113	47
89	59	29
71	5	101



Martin Gardner

En 1.988 Martin Gardner, el célebre divulgador científico, ofreció un premio de $100 para la persona que consiguiera un cuadrado mágico de orden tres formado por números primos en progresión aritmética. Ese mismo año Harry Nelson, presentó 22 soluciones, utilizó para hallarlas un computador de la Universidad de California, reproducimos aquí el cuadrado de menor constante.

1 480 028 201	1 480 028 129	1 480 028 183
1 480 028 153	1 480 028 171	1 480 028 189
1 480 028 159	1 480 028 213	1 480 028 141

Un curioso cuadrado invertible, mostrado a continuación, cumple que cada fila, columna y diagonal suma 264, pero además, si se gira 180º el cuadrado los números siguen siendo los mismos aunque ahora han variado su ubicación, no obstante si sumamos las filas columnas y diagonales de este nuevo cuadrado seguiremos obteniendo la constante mágica 264.

96	**11**	**89**	**68**
88	**69**	**91**	**16**
61	**86**	**18**	**99**
19	**98**	**66**	**81**

Joseph Madachy, editor del *Journal of Recreational Mathemátics* plantea una variante novedosa a los cuadrados mágicos, el los llama cuadrados antimágicos, la tarea ahora es tomar los n^2 primeros números de la serie de los enteros positivos y arreglarlos en una cuadrícula de nxn, de modo que las filas columnas o diagonales sumen distintas cantidades, pero estas cantidades deben estar en secuencia natural.

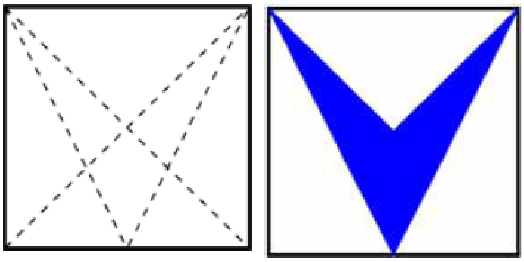
El siguiente cuadrado mágico de orden 4, es una joya incomparable. Tiene la sorprendente característica de ser *pandigital*, es decir, que cada elemento está formado por las diez cifras de 0 a 9 sin repetir ninguna y además la suma de sus filas, columnas y diagonales es 4129607358, también pandigital.

1037956284	1036947285	1027856394	1026847395
1026857394	1027846395	1036957284	1037946285
1036847295	1037856294	1026947385	1027956384
1027946385	1026957384	1037846295	1036857294

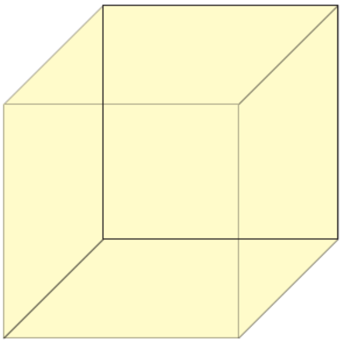
(Autor: R. Marcelo Kurchan)

Tres problemas fáciles

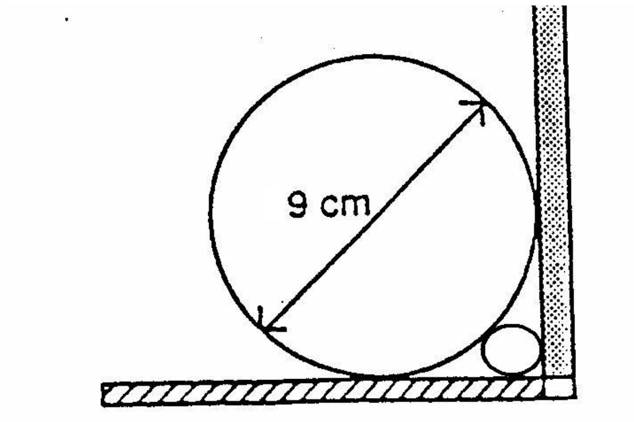
1.- Tomamos un cuadrado de lado l0 cm. y se marcar sobre él las siguientes líneas de la fig.1, ¿cuánto mide el área coloreada?



2.- Coloca en los vértices de este cubo los números de 1 a 8 de modo que la suma de los números de cada cara sea 18.



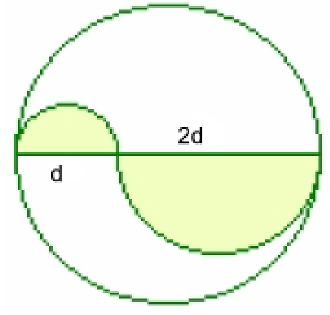
3.- Observa estas dos tuberías:



¿Cuál es el diámetro de la menor?

Tres problemas un poco difíciles

1. Calcula la proporción sombreada en la figura sabiendo que un diámetro es doble del otro.



2.- Calcula:

$$3^{1/3}\cdot 9^{1/9}\cdot 27^{1/27}\cdot\ldots\cdot\left(3^{n}\right)^{1/3^{n}}.$$

3.- Si el número de mi casa fuera múltiplo de 3, estaría entre 50 y 59. Si no fuera múltiplo de 4, estaría entre 60 y 69. Y si no fuera múltiplo de 6, estaría entre 70 y 79. ¿En qué numero vivo?

Tienes 20 segundos para hallar el error, o aceptar el resultado.

$$\frac{1}{4}<\frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2}<\frac{1}{2}$$

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right)^{2}<\ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$2\cdot\ln\left(\frac{1}{2}\right)<\ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$2<1$$

Envíanos tus respuestas y participarás en nuestros sorteos. Recuerda nuestras direcciones:

materranya@yahoo.es

http://www.catedu.es/materranya

http://materranya.iespana.es