BOLETÍN DE MATEMÁTICAS DEL I.E.S. MATARRAÑA – Número 24 - DICIEMBRE 2.010

NOS HAN RETADO

Siempre es de agradecer la correspondencia que se recibe de parte de los lectores. En esta ocasión dedicamos nuestra portada a Sara Escucha, que desde Madrid nos lanza un reto: calcular, sin más ayuda que un lápiz y un poco de papel, el valor de:

$$\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$$

En primer lugar hemos de aclarar que quienes hacemos este boletín somos, modestamente, gente leída. Por tanto, entre todos, y tras mucho pensar y recordar, optamos por ofrecer la solución que reproducimos aquí, se basa en ejercicios similares que piden probar que números del aspecto del dado son enteros, lo que, al menos en principio, es llamativo.

Llamando A al número dado:

$$A=\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$$

Y por su aspecto con raíces cúbicas, se opta por elevarlo al cubo, haciendo uso del producto notable:

$$(a+b)^3=a^3+3\cdot a^2\cdot b+3\cdot a\cdot b^2+b^3$$

Así:

$$\begin{aligned}A^3 &= 20+14\sqrt{2} \quad + \\ &+3\cdot\sqrt[3]{\left(20+14\sqrt{2}\right)^2}\cdot\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}+ \\ &+3\cdot\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}\cdot\sqrt[3]{\left(20-14\sqrt{2}\right)^2}+ \\ &+20-14\sqrt{2}\end{aligned}$$

que puede escribirse:

$$\begin{aligned}A^3 &= 40+ \\ &+3\cdot\sqrt[3]{\left(20+14\sqrt{2}\right)\cdot\left(20+14\sqrt{2}\right)\cdot\left(20-14\sqrt{2}\right)} \\ &+3\cdot\sqrt[3]{\left(20+14\sqrt{2}\right)\cdot\left(20-14\sqrt{2}\right)\cdot\left(20-14\sqrt{2}\right)}\end{aligned}$$

y utilizando otro producto notable

$$(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$$

dentro de cada raíz:

$$\begin{aligned}A^3 &= 40+ \\ &+3\cdot\sqrt[3]{\left(20+14\sqrt{2}\right)\cdot\left(20^2-14^2\cdot 2\right)} \\ &+3\cdot\sqrt[3]{\left(20^2-14^2\cdot 2\right)\cdot\left(20-14\sqrt{2}\right)}\end{aligned}$$

Como 20^2-14^2·2 = 400-196·2 = 400 – 492 = 8, se tiene:

$$A^3=40+3\cdot\sqrt[3]{\left(20+14\sqrt{2}\right)\cdot 8}+3\cdot\sqrt[3]{8\cdot\left(20-14\sqrt{2}\right)}$$

y ahora, como $\sqrt[3]{8}=2$

$$A^3=40+3\cdot 2\cdot\sqrt[3]{\left(20+14\sqrt{2}\right)}+3\cdot 2\cdot\sqrt[3]{\left(20-14\sqrt{2}\right)}$$

$$A^3=40+6\cdot\left[\sqrt[3]{\left(20+14\sqrt{2}\right)}+\cdot\sqrt[3]{\left(20-14\sqrt{2}\right)}\right]$$

Es decir: $A^3=40+6\cdot A$.

Y este es el punto fundamental del razonamiento, el valor que nos proponían y que hemos llamado A es solución de la ecuación: $x^3-6x-40=0$.

Sabemos que sus posibles raíces enteras serán divisores de 40, utilizando la Regla de Ruffini obtenemos que x=4 es una de ellas. De este modo: $x^3-6x-40=(x-4)\cdot(x^2+4x+10)$.

Pero el polinomio x^2+4x+10 tiene discriminante negativo, luego no hay más raíces reales de $x^3-6x-40$ que 4, y A era una de ellas. Por tanto A=4.

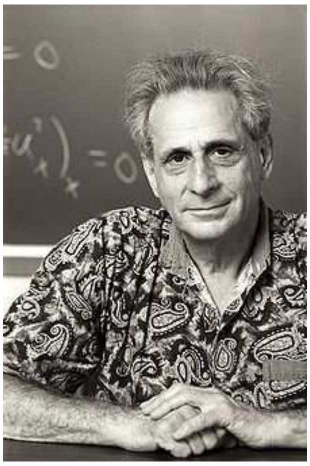
Esperamos haber sido claros y, sobre todo, haber expresado un método interesante de mostrar el carácter entero de ciertos números radicales. Pero la cosa no va a quedar aquí. Nosotros también vamos a retar a Sara y a todos nuestros lectores. Lo vamos a hacer con el primero de los *problemas un poco difíciles* de nuestra contraportada.

.

EL PRINCIPIO DE KRUSKAL

Querido lector del boletín materraña, en este artículo del número de diciembre te vamos a mostrar un juego sorprendente. Para empezar, elige una palabra de la primera línea de éste párrafo. ¿Ya?, de acuerdo, para no perderte señálala con un lápiz, con el dedo, o con cualquier otra cosa. Cuenta el número de letras de palabra elegida, ahora mueve el lápiz, o el dedo, hacia delante tantas palabras como letras tiene tu palabra. Ahora ya tienes tu nueva palabra. Nuevamente, cuenta sus letras y muévete adelante tantas palabras como indique ese número. Tal vez el ejercicio te resulte un poco pesado, pero te sorprenderá saber que si tienes paciencia y sigues hasta acabar éste párrafo, en MATERRAÑA ya sabíamos dónde ibas a llegar, por eso VAN escritas en MAYÚSCULAS. Si quieres, empieza desde otra palabra.

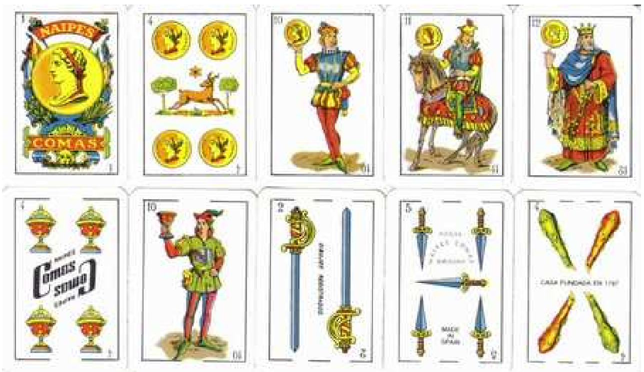
Bien, no hay truco, es un principio matemático denominado El Principio de Kurskal, en honor del matemático Martin David Kruskal. Puedes elegir cualquier texto medianamente largo, elegir una palabra de la primera línea, seguir el proceso anterior y recordar la última palabra de dicho texto a la que puedes llegar. Si empiezas con otra palabra de la primera línea, llegarás a la misma palabra final.



Martin David Kruskal (28 de septiembre, 1925 – 26 de diciembre, 2006) fue un matemático y físico norteamericano. Hizo contribuciones fundamentales en muchas áreas de las matemáticas y de la ciencia, extendiéndose de la física de plasma a la relatividad general y de análisis no lineal al análisis asintótico. Su contribución más celebrada era el descubrimiento y la teoría de solitones Un solitón es una onda solitaria que se propaga sin deformarse en un medio no lineal. Se encuentra en fenómenos físicos como solución a ecuaciones diferenciales no lineales.

Estudió en Universidad de Chicago y en la de Nueva Cork. Aparte de su investigación, Kruskal era conocido como mentor de científicos más jóvenes.

En realidad este juego no siempre funciona, se basa en un principio probabilístico. Para explicarlo vamos a recurrir a una variante con las cartas de una baraja española o francesa, da lo mismo. Suponemos que le estás haciendo el juego a otra persona. Mezcla bien y pide a la otra persona que elija una de las cinco primeras que vas a ir echando una a una. Esa es "su" carta, después, tú sigues echando cartas una a una y pides a tu amigo que cuente hacia delante tantas cartas como el número de "su" carta, esta será "su nueva carta".



Si la primera carta elegida es el as, la segunda el cuatro de oros y la tercera el 4 de copas.

Le dices que repita el proceso hasta el final de la baraja y tú serás capaz de adivinar "su última carta". Evidentemente, tú, mientras lanzas las cartas una a una, también vas realizando "las cuentas", y ya sabes que, al final, coincidiréis en vuestra "última carta". Cuando sale figura, podemos pedir que se cuente 8, 9 y 10, o para hacerlo menos monótono, que se cuente 1. Esto, además, como veremos más adelante, nos beneficia.

Como hemos dicho, este juego se basa en un resultado de probabilidad, luego no es seguro al ciento por ciento, pero funciona casi siempre. Comencemos con una sencilla reflexión: empecemos por la palabra, o la carta, que sea, en cuanto su "camino" coincida con el de otra palabra, o carta, a partir de ahí ambos caminos serán coincidentes en cada salto. Así, si los saltos no son muy grandes y el texto suficientemente largo, en algún momento es probable que dos jugadores coincidan. De ahí

que, en el caso de la baraja, pidamos que se cuente 1 para las figuras.
Veamos un ejemplo. Supongamos que hemos lanzado las 40 cartas y la secuencia es esta (nos fijamos sólo en el número y señalamos “S” a la sota, “C” al caballo y “R” al rey):

7	S	2	3	2	7	6	R
4	1	6	1	C	5	2	C
2	S	3	C	4	S	3	1
R	5	R	6	3	5	S	5
1	6	C	4	7	R	7	4

Si recuadramos con línea doble en “camino” de quien elija el 7 para empezar y subrayamos el de quien elija el 3, vemos lo pronto que coinciden:

7	S	2	3	2	7	6	R
4	1	6	1	C	5	2	C
2	S	3	C	4	S	3	1
R	5	R	6	3	5	S	5
1	6	C	4	7	R	7	4

Aquí hemos contado que las figuras saltan 1, pero si saltan 8 la sota, 9 el caballo y 10 el rey, entonces:

7	S	2	3	2	7	6	R
4	1	6	1	C	5	2	C
2	S	3	C	4	S	3	1
R	5	R	6	3	5	S	5
1	6	C	4	7	R	7	4

Por eso, o pedimos que cuenten 1 o también se pueden quitar las figuras diciendo que puede inducir a error al tener que contar series largas de 8, 9 o 10 cartas.

Cuando Kruskal estudió este juego lo hizo con baraja francesa: 52 cartas –lo que nos beneficia frente a la española- de 1 a 9 y J, Q, K. Haciendo que con las figuras se avance 5 y eligiendo para empezar una de las diez primeras, llegó a la conclusión de que dos caminos llegan a unirse con probabilidad 5/6 y que beneficia a quien hace el juego comenzar con una carta baja o comenzar cuanto antes (con las primeras lanzadas en lugar de con las últimas permitidas).
Este principio de Kruskal tiene múltiples aplicaciones: por ejemplo, ver lo relacionados, o no independientes, que son dos cadenas de eventos que se desarrollan simultáneamente. El principio puede indicar si determinadas coincidencias lo son en realidad.

Un estudio de 2.001 de tres investigadores americanos (*The Kruskal Count,* Jeffrey C. Lagarias, Eric Rains y Robert J. Vanderbei), muestra que ante estos tres supuestos:

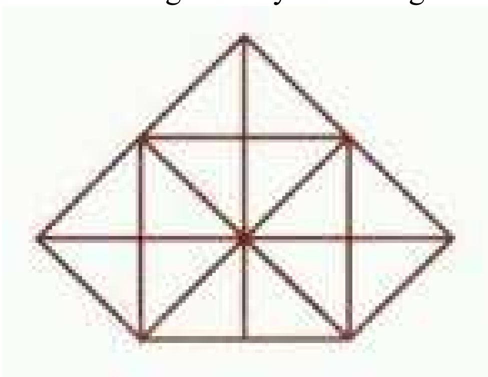
1. Los valores asignados a J, Q, K son 11, 12 y 13.
2. Los valores asignados a J, Q, K son 10 para todos.
3. Los valores asignados a J, Q, K son 5 para todos.

Y eligiendo quien hace el juego la primera carta que salga, la probabilidad de que dos caminos se junten es, aproximadamente, 70% en el primer caso, 75% en el segundo y 87% en el tercero.
Si en vez de la primera carta lanzada se elige una “pequeña” de las primeras, la probabilidad de coincidir se reduce en, aproximadamente, un 2’5%.

Tres problemas fáciles

1.- De los 420 suscriptores de Materraña, la mitad de los alumnos y un tercio de los profesores han leído el último boletín, lo que supone 170 lectores. ¿Cuántos alumnos y profesores hay entre los suscriptores?

2.- ¿Cuántos triángulos hay es esta figura?



3.- Cada letra del cuadro representa un número entero, halla todos los números de la tabla sabiendo que los números exteriores indican la suma de esa fila o columna.

A	C	B	A	35
C	A	B	C	
B	C	B	B	
A	B	A	B	74
	55			

Envíanos tus respuestas y participarás en nuestros sorteos. Recuerda nuestras direcciones:

materranya@yahoo.es
http://www.catedu.es/materranya
http://materranya.iespana.es

Tres problemas un poco difíciles

1. Lanzamos el reto anunciado en la portada. Este sistema tiene 8 soluciones reales diferentes

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z = 2 \\ x^2 + y + z^2 = 2 \\ x + y^2 + z^2 = 2 \end{cases}$$

¿Cuántas puedes hallar por métodos algebraicos?

2.- Find the coefficient in x^8 in the expansion of $(1 + x^2 - x^3)^9$.

3.- Calcular el valor de x^2 cuando x es solución de

$$\sqrt[4]{4^{\sqrt{2}}} = \left(\frac{1}{x}\right)^{-\left(\frac{1}{x}\right)^{-1}}$$