BOLETÍN DE MATEMÁTICAS DEL I.E.S. MATARRAÑA – Número 25 - ENERO 2.011

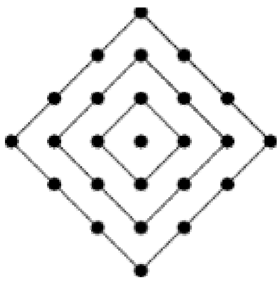
25

Materraña llega a su número 25, algo que merece ser celebrado. Así que dedicamos este artículo a tan singular número.

Decir que es un cuadrado, no es mucho decir. Pero si decimos que es el menor cuadrado que puede ponerse como suma de dos cuadrados consecutivos: $5^2 = 4^2 + 3^2$, la cosa va mejorando. Y no sólo eso, sino que forma parte de una terna pitagórica: $25^2 = 7^2 + 24^2$, y tiene curiosas propiedades:

$25 = 13^2 - 12^2$
$25 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9$
$25 = 3 + 4 + 5 + 6 + 7$
$25 = 1^2 + 2^2 + 2^2 + 4^2$
$25 = (1^2 + 2^2)^2$

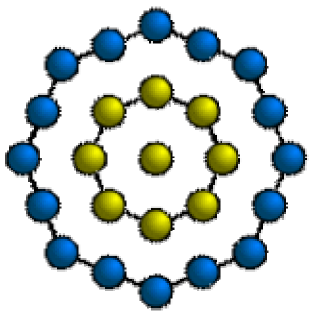
Además de cuadrado, 25 es número cuadrado centrado:



El lector puede comprobar que los cuadrados centrados siguen la ley:

$$n^2 + (n-1)^2 \qquad (1)$$

es el n-ésimo cuadrado centrado. También es un número octogonal centrado:



¿Puede el lector averiguar una ley que proporcione los números octogonales centrados similar a (1) para los cuadrados?

También es un número circular o automórfico: las potencias de 25, o de cualquier número que acabe en 25, acaban en 25.

n	n^2	n^3	n^{10}
25	625	15625	390625
125	15625	1953125	244140625
225	50625	11390625	2562890625
325	105625	34328125	11156640625

Observando el cuadro anterior se nos ocurre preguntar al lector si las potencias pares siempre acabarán en 625 y las impares van oscilando entre 625 y 125.

Además, según parece, 25 y 27 son el único caso de cuadrado y cubo separados 2 unidades.

También es un número de Cullen. Estos son de la forma $n \cdot 2^n + 1$ y son un caso particular de los números de Proth: los de la forma $k \cdot 2^n + 1$, donde k es un impar entero positivo y n un entero positivo tal que $2^n > k$. El lector habrá observado ya que sin esta última condición todos los impares mayores que 1 serían números de Proth.

EL CAZADOR Y LA PRESA

La vida en el reino animal es una lucha constante por la supervivencia. Herbívoros como los conejos comen forraje evitando a los carnívoros que necesitan cazar y matar para conseguir su sustento. Esta situación lleva a que depredadores y presas se hallen encerrados en un ciclo de aumento y disminución de sus poblaciones que los ecólogos pueden modelar con ecuaciones matemáticas.

Imaginemos una isla cubierta de hierba y habitada por una pequeña población de conejos. Sin otro animal alrededor, los conejos son libres para comer y reproducirse.

Si aceptamos que el número de conejos que nacen y mueren en un período determinado es proporcional al número total de conejos en ese momento, el cambio de su población es

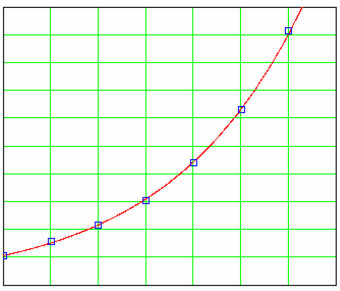
$$\frac{dN}{dt} = rN$$

Aquí N es el número de conejos que hay en el instante t, y r es la tasa de crecimiento de la población de conejos: la diferencia entre las tasas de nacimiento y la muerte.

Resolviendo la ecuación diferencial se obtiene

$$N = N_0 \cdot e^{r \cdot t}$$

donde N_0 es la población inicial de conejos en el momento $t = 0$. La solución es una función exponencial, por lo que este modelo es a menudo llamado el modelo de crecimiento exponencial, y tiene dos resultados posibles. Si hay más nacimientos que muertes de conejos, esto es $r>0$, entonces la tasa de crecimiento es positivo y la población crece exponencialmente a infinito. Si ocurre lo contrario y la tasa de crecimiento es negativa, $r<0$, a la larga no quedarán conejos.



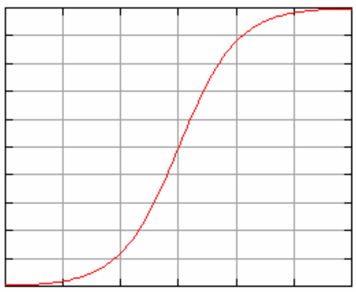
Modelo de crecimiento exponencial con r>0

El modelo exponencial es fácil de entender, pero no es muy realista. Con un una tasa de natalidad positiva y tiempo suficiente, los conejos abarcarán ocupando toda la isla, y aun así todavía seguirían aumentando. Obviamente no va a ocurrir esto porque en algún momento los conejos se quedarán sin alimento y espacio vital.

La isla tiene una *capacidad de carga*: el número máximo de conejos que puede soportar, y una vez que se llega a ella la población se mantiene estable. Podemos añadir el concepto de capacidad de carga K al modelo de crecimiento exponencial, con lo que la ecuación diferencial se convierte en:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{rN(K - N)}{K}$$

Esta ecuación representa el llamado *modelo logístico*, y a pesar de que encontrar su solución es más complicado que en el modelo exponencial, todavía podemos tener una idea de cómo se comporta al examinar la relación entre N y K. Si N es pequeño, $(KN) / K$ es cercano a 1, por lo que no cambia mucho la ecuación y la población aumenta como en el modelo exponencial. Pero cuando N se acerca a K (la población real se acerca a la que la isla puede soportar), $(KN) / K$ se hace menor, reduciendo dN / dt, hasta que finalmente llega a cero, $K=N$, y la población de conejos deja de crecer. Si N es mayor que K, es decir, la población de conejos es más grande que la isla puede manejar, $K\text{-}N$ se hace negativa y la población disminuye a un nivel más soportable para la isla.



Modelo de crecimiento logístico con N<K

El comportamiento exacto del modelo depende de la tasa de crecimiento *r*, y para ciertos valores del nivel de la población se vuelve caótica, lo que significa que cambia rápidamente de una manera que parece casi al azar.

El modelo logístico es una buena descripción de una sola población animal, pero en la vida real no suele ocurrir esto. Incluso pequeñas áreas de terreno pueden contener decenas de especies diferentes. En ese caso el modelado de la interacción de todo un ecosistema no es una tarea fácil. Un punto de partida es el modelo depredador-presa, que describe la interacción entre una especie depredadora y otra que es su presa.

Imagine que una pequeña población de zorros se introduce en Isla Conejos. Ahora la tasa de natalidad no es el único factor determinante de la población de conejos, ya que algunos de ellos serán comidos por los zorros, que a su vez va a morir si no reciben suficiente alimento. La situación es descrita por las ecuaciones siguientes, donde x e y, respectivamente, representan a las poblaciones de conejos y zorros:

$$\frac{dx}{dt} = Ax - Bxy$$

$$\frac{dy}{dt} = Cxy - Dy$$

Las ecuaciones anteriores son conocidas como ecuaciones de Lotka-Volterra o como *ecuaciones predador-presa*, son un par de ecuaciones diferenciales de primer orden no lineales que se usan para el modelado de dos poblaciones que interactuan, una presa y un depredador. Las ecuaciones fueron propuestas de forma independiente por Alfred J. Lotka en 1925 y Vito Volterra en 1926.

En estas ecuaciones:

- y es el número de algún predador (por ejemplo, zorros);
- x es el número de sus presas (por ejemplo, conejos);
- dy/dt y dx/dt representan la variación de las dos poblaciones en el tiempo;
- t representa el tiempo;
- A, B, C y D son parámetros que representan las interacciones de las dos especies.

Para la presa

$$\frac{dx}{dt} = Ax - Bxy$$

Se acepta que las presas tienen suministro de alumento ilimitado y que se reproducen exponencialmente a menos que exista algún predador. Como se ha visto, este crecimiento exponencial está representado en la ecuación por el término Ax. El término de la ecuación Bxy viene a representar el encuentro de las dos especies y su interacción. Si x o y son cero no existe interacción.

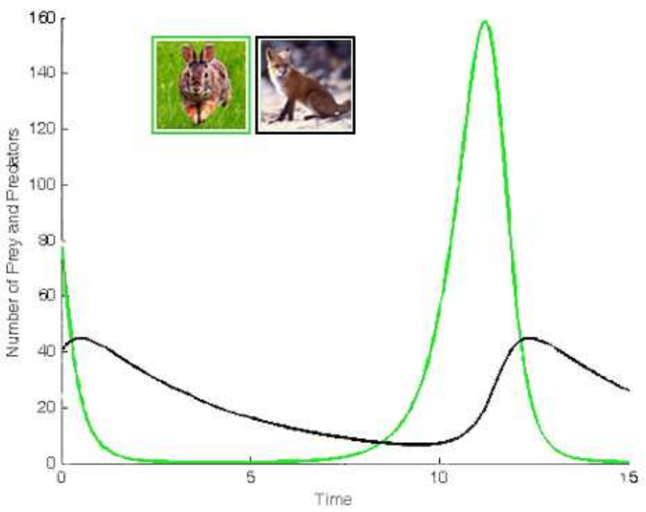
Alfred Lotka *Vito Volterra*

Para el depredador

$$\frac{dy}{dt} = Cxy - Dy$$

En esta ecuación, Cxy representa el crecimiento de los depredadores (obsérvese que en este caso para el crecimiento de los depredadores es necesario usar la razón a la que se consumen las presas, x). Dy representa la muerte natural de los depredadores de forma exponencial; a más depredadores es necesario que el número de presas aumente para mantener la población.

Lamentablemente no es posible obtener una solución general a este sistema de ecuaciones. En cambio, los ecólogos utilizan métodos matemáticos con ordenadores para encontrar soluciones numéricas y obtienen gráficas como la siguiente:



Como se observa, y se sabe de nuestros estudios de ciencias naturales, las poblaciones de depredadores y presas suben y bajan en ciclos. A medida que la población de conejos aumenta hay más alimento para los zorros, por lo que su población también aumenta. Con el tiempo los zorros será demasiados, cazarán mucho y dejarán pocos conejos. Con una población de conejos baja, los zorros no puede conseguir suficiente comida y su población empieza a disminuir, permitiendo que el número de conejos aumente de nuevo y continuar el ciclo.

Cada vez que se usa un modelo matemático, se ha de hacer una elección entre la precisión y complejidad. Una ecuación tan simple como el modelo exponencial es fácil de resolver, pero no muy realista, y el modelo depredador-presa proporciona mejor resultado, pero es más difícil de resolver. Los ecólogos, biólogos y matemáticos usan de modelos avanzados para estudiar los hábitats naturales y aprender más sobre el reino animal. El mismo tipo de matemáticas describen la propagación de enfermedades infecciosas. Además, la comprensión del mundo natural a través de las matemáticas ayuda a proteger las especies vulnerables y favorecer su lucha por la supervivencia.

Los conejos de Fibonacci

Leonardo de Pisa (conocido como Fibonacci, contracción de *filius Bonacci*, es decir el hijo de Bonacci) nace en Pisa, probablemente hacia 1170 y muere alrededor de 1250. Al ser su padre representante comercial de la ciudad de Pisa en Argelia, estuvo en contacto con la cultura árabe, interesándose especialmente por sus matemáticas.

La serie de números que hizo célebre es aquella donde cada término es igual a la suma de los dos términos anteriores: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, y así sucesivamente.

El problema a resolver es el siguiente: ¿Cuántas parejas de conejos pueden producirse en un año a partir de la pareja inicial, si consideramos que cada pareja engendra al mes una nueva pareja de conejos que se convierten en productivos al segundo mes de vida y considerando que los conejos nunca mueren?

Como la primera pareja de conejos tiene descendencia en el segundo mes, dobla el número y, en el tercer mes, se tienen dos parejas. De éstas, una pareja, la primera, también tiene descendencia en el mes siguiente, de manera que en el cuarto mes hay tres parejas. De ésas, dos parejas tienen descendencia en el mes siguiente (la segunda allí alcanza su madurez reproductiva), de modo que en el quinto mes han nacido dos parejas adicionales de conejos, y el número total de parejas de conejos llega a cinco. En dicho mes tres de estas cinco parejas tienen hijos y, en el sexto, el número de parejas llega a 8. En un año se tendrá 144 pares de conejos.

Mes	Parejas en edad de procrear	Proceso de producción				Número de parejas
Momento de partida	Ninguno					1
Primer mes	1	1	+	1	nuevos	2
Segundo mes	1	2	+	1	nuevos	3
Tercer mes	2	3	+	2	nuevos	5
Cuarto me	3	5	+	3	nuevos	8
Quinto mes	5	8	+	5	nuevos	13
Sexto mes	8	13	+	8	nuevos	21
Séptimo mes	13	21	+	13	nuevos	34
Octavo mes	21	34	+	21	nuevos	55
Noveno mes	34	55	+	34	nuevos	89
Décimo mes	55	89	+	55	nuevos	144
Décimoprimer mes	89	144	+	89	nuevos	233
Décimosegundo mes	144	233	+	144	nuevos	377

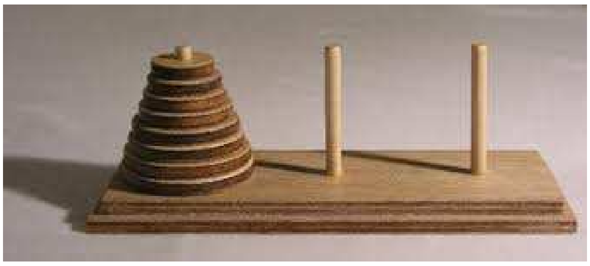
Es decir: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, 10946, 17711, 28657, 46368, 75025, 121393, 196418, 317811, 514229,... Tiene un crecimiento exponencial que tiende a infinito con el tiempo.

LEYENDAS DE LAS TORRES DE HANOI Y DEL AJEDREZ.

Las Torres de Hanoi

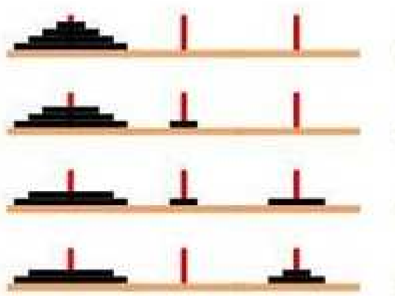
Cuenta una leyenda que en la ciudad hindú de Benarés, junto al río Ganges, había un templo donde se sitúa el centro del mundo.
El dios Brahma colocó en él verticalmente tres varillas de diamante, puso en la primera de ellas 64 anillos de oro puro: el de mayor diámetro en la parte inferior, y los demás por orden descendente de tamaño uno encima del otro, así el anillo que estuviese arriba era el de menor diámetro.
Ordenó a los sacerdotes del templo trasladar todos los anillos a la tercera varilla utilizando la segunda como auxiliar y cumpliendo la dos reglas siguientes:

a) Cada vez se mueve un sólo anillo.
b) No se puede colocar un anillo de mayor diámetro sobre otro de menor.



La leyenda dice que cuando los 64 anillos pasen a la tercera varilla observando estas dos reglas llegaría, con un gran estruendo, el final del mundo.
¿Cuántos movimientos deben hacer para conseguirlo? El número de movimientos que deben hacer es 264-1 esto da: 18.446.744.073.709.551.615.

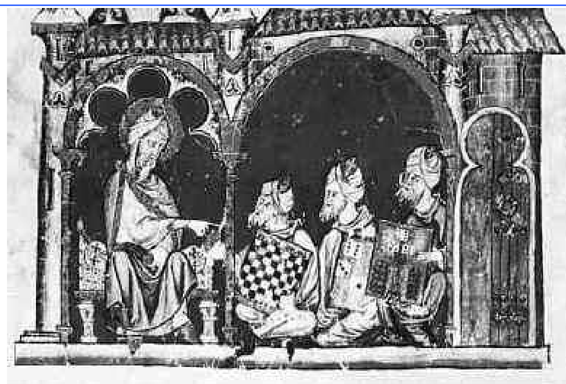
Para llevar el primer disco a la tercera hace falta un movimiento. Para trasladar dos discos, hacen falta tres.



Para pasar tres discos, hacen falta 7 movimientos, y en general par n discos, 2^n-1.

El ajedrez.

Se cuenta que el rey hindú Sheram, al conocer el juego del ajedrez quedó tan maravillado de lo ingenioso del juego y de la variedad de posiciones que en él son posibles, que quiso recompensar a su inventor, le ofreció cumplir el deseo que le pidiera. Tras un rato pensando le hizo la siguiente petición:
- Soberano, manda que me entreguen un grano de trigo por la primera casilla del tablero, por la segunda casilla el doble: 2 granos, por la tercera el doble de la 2ª: 4 granos, por la cuarta: 16 granos, por la quinta 32 granos...
-Sea como dices, recibirás el trigo correspondiente a las 64 casillas, conforme a tu desedo, en cada casilla el doble que en la precedente.



El ajedrez surgió probablemente en la India en una fecha que no se puede determinar, de allí pasó a su vecina Persia y cuando Persia fue conquistada por los árabes en el siglo VII, estos quedaron fascinados por el juego y lo difundieron por todo su imperio, que abarcaba desde la India hasta lo que hoy es España, entrando de este modo a Europa.

Por la tarde el rey preguntó si ya le habían dado el trigo al inventor.
- Los matemáticos de la corte lo están calculando- le respondieron

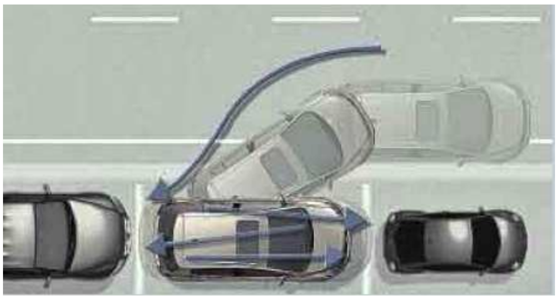
y así un día y otro....hasta que se dieron cuenta que no había esa cantidad de trigo en todo el reino, y aunque la Tierra toda entera se sembrara de trigo no sería suficiente para satisfacer la recompensa.
¿Qué cifra de granos de trigo debería recibir nuestro inventor?

18.446.744.073.709.551.615 granos de trigo ¡La misma que los movimientos que tienen que hacer los monjes!

LA GEOMETRÍA DEL APARCAMIENTO PERFECTO.

Últimamente los coches de gama alta de muchas marcas incorporan el "asistente de aparcamiento automático" que permite aparcar en huecos sólo unos 80 cm. más largos que el propio vehículo, realizando varias maniobras adelante y atrás. . ¿Cuánta longitud extra necesita un coche para aparcar en paralelo? Simon R. Blackburn, profesor del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Londres ha hallado la fórmula que lo determina en un estudio encargado por Vauxhall Motors, del grupo General Motors .

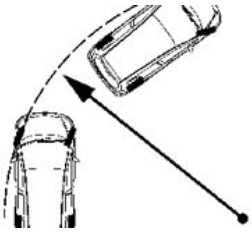
Para hacer una maniobra de aparcamiento "perfecta", es decir, sin echar marcha adelante y atrás varias veces, sino aparcar a la primera, es necesaria una longitud mínima de hueco entre el coche anterior y el posterior.



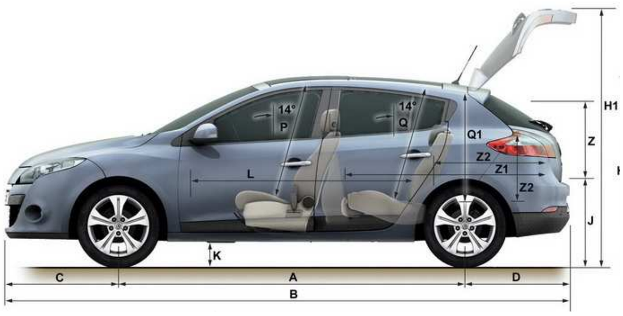
Simon R. Blackburn, haciendo uso del Teorema de Pitágoras determina esa cantidad. Aquí está la fórmula:

$$L+\sqrt{\left(r^2-l^2\right)+\left(l+k\right)^2-\left(\sqrt{r^2-l^2}-w\right)^2}-l-k$$

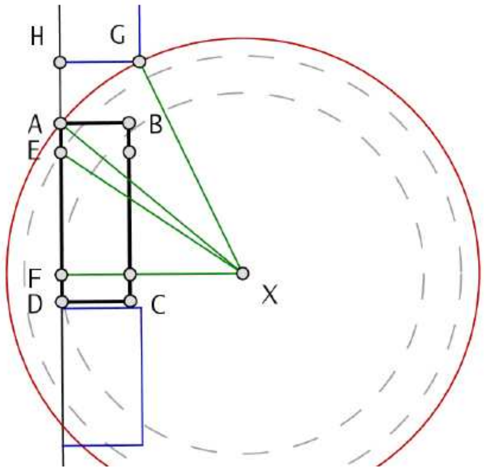
Donde L es la longitud del vehículo, r es el radio de giro del coche



l es la distancia entre los ejes (A en la imagen del coche de la figura siguiente) y k es la distancia del eje delantero al extremo delantero del coche (esta distancia se llama voladizo delantero, es C en la figura) y w es el ancho del hueco ocupado por el coche delantero medido hasta el bordillo.



Esta formula se justifica con la siguiente figura que representa al coche negro aparcando, visto desde arriba, justo antes del último paso de la maniobra: estamos justo tocando el coche de detrás antes de adelantar un poco para quedarse en el centro del hueco.



El bordillo es la línea HAEFD, y el coche es el rectángulo negro ABCD. HG es el coche delantero, cuya anchura respecto al bordillo hemos llamado w.

Cuando nuestro coche gira marcha atrás con el máximo radio de giro r, la esquina A describe el círculo rojo, ajustando al punto G del coche delantero. Nuestras ruedas E y F describen los círculos de línea discontinua. Las tres circunferencias tienen el mismo centro, X.

Nosotros conocemos: $r=|EX|$; $l=|EF|$; $k=|AE|$; $w=|GH|$ y buscamos AH. (Obsérvese que en este momento nuestro coche "casi" toca al de detrás).

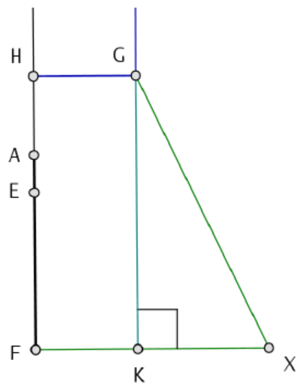
En el triángulo EFX, aplicando el Teorema de Pitágoras, se tiene:

$$|FX|=\sqrt{r^2-l^2}$$

En el triángulo AFX, aplicando el Teorema de Pitágoras:

$$|AX|=\sqrt{\left(l+k\right)^2+\left(r^2-l^2\right)}$$

Obsérvese que $|AX| = |GX|$



Si por *G* trazamos una línea paralela al bordillo hasta cortar a la línea *FX* en el punto *K,* Se tiene que $|KX| = |FX| - w$.

Aplicando el Teorema de Pitágoras al triángulo *GKX:*

$$|GK| = \sqrt{\left(r^2 - l^2\right) + \left(l + k\right)^2 - \left(\sqrt{r^2 - l^2} - w\right)^2}$$

Y como $|AH| = |GK| - l - k$, se tiene el resultado de Simon R. Blackburn.

Pero, ¿cómo funcionan los sistemas de aparcamiento automático?

Los sistemas basados en ultrasonidos funcionan con sensores integrados en los parachoques. Cuantos más sensores más precisa será la medición y la maniobra. Los sensores envían y reciben señales de ultrasonidos y envían los datos recibidos a un ordenador que los procesa y calcula la distancia menor a un objeto.

El primer asistente de aparcamiento basado en este sistema fue desarrollado por la empresa Hella para Volkswagen. Según el fabricante tiene diferentes denominaciones, Audi lo denomina APS (Acoustic Parking System), BMW PDC (Park Distance Control), Mercedes-Benz PARKTRONIC y Volkswagen ParkPilot.

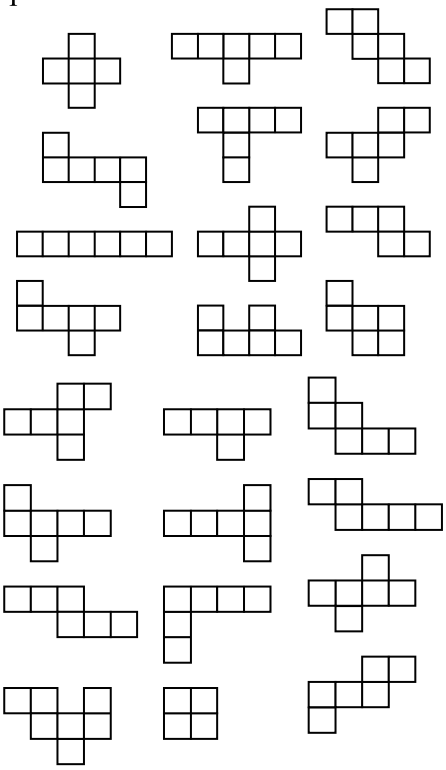
Otros sistemas se basan en radar, el primero fue comercializado en 2.005 con el termino Parkassistent en el Mercedes-Benz Clase-S (W221). El principio de medición es el mismo que el de los ultrasonidos, pero usando señales de radar. La ventaja es que no se necesitan sensores adicionales, lo que trae consigo ahorro de costes y la complejidad técnica. No son necesarios sensores en el parachoques pues el radar funciona a través de este. Además es inmune a interferencias, lo que no ocurre con el basado en ultrasonidos. La desventaja de este sistema se presenta en situaciones con precipitación de lluvia importante: los sensores del radar pueden, ocasionalmente, reconocer la lluvia frente al parachoques como un obstáculo.

Además hay asistentes de aparcamiento que se encargan de realizar la maniobra completa por sí solos, girando el volante y desplazando el vehículo de forma automática. Después de que la maniobra se inicie al presionar un botón, los sensores miden en dirección transversal el hueco libre. Si el tamaño de la plaza de aparcamiento es el suficiente, el conductor recibirá una notificación.

El conductor no tiene más que parar el vehículo a una cierta distancia de la plaza de aparcamiento, poner la marcha de atrás y pisar el pedal del acelerador con cuidado si la situación del tráfico lo permite. El asistente de giro se encarga de girar el volante en ambas direcciones. En el momento en que el vehículo alcanza la distancia mínima hacia atrás, el conductor debe frenar, poner la marcha hacia delante y entonces él mismo ha de conducir hacia delante. Las maniobras necesarias se llevan a cabo con la ayuda de guías de clotoide con un cálculo constante de recorrido del ángulo. Debido a que el conductor es quien pisa el freno y el acelerador, es él el responsable del aparcamiento. Este tipo de sistemas están disponibles en las casas Audi, Lexus, Toyota y Volkswagen.

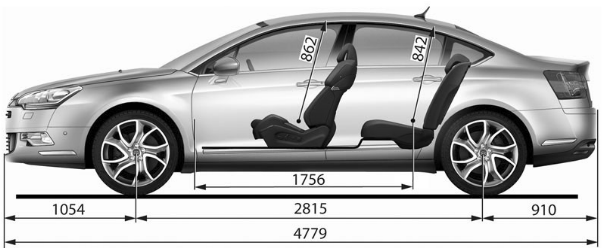
Tres problemas fáciles

1.- Aquí tienes varios desarrollos, ¿con cuáles de ellos se puede fabricar un cubo?



2.- Si los monjes de Benarés hiciesen cada movimiento en 1 segundo y no se equivocaran ¿cuánto tardaría en llegar el fin del mundo? Y si en un decímetro cúbico de trigo entran 10.000 granos, ¿qué volumen de trigo se comprometió a entregar el rey Sherman?

3.- El coche de la figura tiene un radio de giro de 5'4 metros y las medidas que aparecen en la fotografía (están en milímetros). ¿Cuánto espacio necesita como mínimo para un aparcamiento perfecto si el coche delantero ocupa, desde el bordillo 1'60 metros?



Tres problemas un poco difíciles

1. The number 48 has a peculiarity: if you add 1 to it the result is a square number, and if you add 1 to its half, you also get a square number Are there other numbers having this peculiarity? Which are they?

2. Mira la matrícula de mi coche, curiosamente está formada por cuatro números que pertenecen a la sucesión de Fibonacci, y en el orden correcto.

¿Cuántas matrículas hay que cumplan que la tercera cifra es la suma de la primera con la segunda y que la cuarta es la segunda más la tercera? ¿Y si permitiéramos, además, matrículas como esta: 4812 en que las cifras 3ª y 4ª forman un número suma de la 1ª y 2ª?

3. En un triángulo dos lados miden b y c, además su área es

$$S = \frac{bc}{5}$$

Halla cuánto mide el tercer lado del triángulo.
Pista: utiliza el teorema del coseno.

1 x 8 + 1 =9
12 x 8 + 2 = 98
123 x 8 + 3 = 987
1234 x 8 + 4 = 9876

Envíanos tus respuestas y participarás en nuestros sorteos. Recuerda nuestras direcciones:
materranya@yahoo.es
http://www.catedu.es/materranya
http://materranya.iespana.es