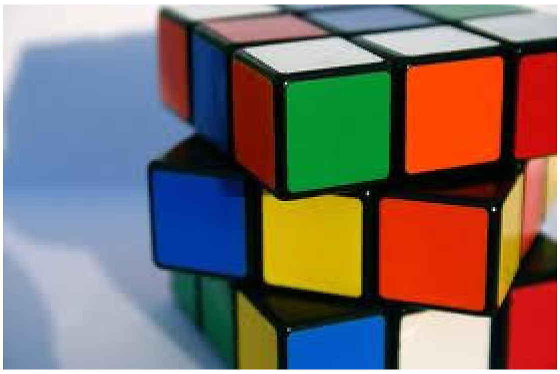
BOLETÍN DE MATEMÁTICAS DEL I.E.S. MATARRAÑA – Número 26 - FEBRERO 2.011

EL NÚMERO DE DIOS

No, esto no va de teléfonos, sino del cubo Rubik. Ya hemos mencionado en algún número anterior de este boletín que existen 43.252.003.274.489.856.000 *configuraciones diferentes del cubo. El Número de Dios es el númeor mínimo de movimientos suficiente para resolverlo desde cualquier estado en que se encuentre, por muy desordenado que sea. Y el Algoritmo de Dios, el método de resolverlo en esos movimientos.*

El **cubo de Rubik**, o **cubo mágico** en algunos países, es un rompecabezas mecánico inventado por el escultor y profesor de arquitectura húngaro Ernö Rubik en 1974. El juguete llegó por primera vez a las jugueterías de fuera de Hungría en febrero de 1980.

Casi inmediatamente tras su aparición, los matemáticos empezaron a pensar sobre él. ¿Cuántas ordenaciones diferentes hay? ¿Cuántos movimientos serán necesarios como mínimo para resolverlo, por muy desordenado que esté?

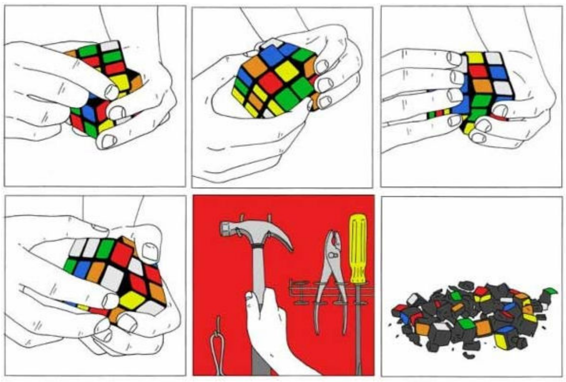


En 1980 se encontró que ese número sería 18 o mayor. La primera cota superior par el Número de Dios fue 80. La siguiente table muestra la evolución de las cotas.

C.I.: Cota inferior. C.S.: Cota superior.

Fecha	C.I.	C.S.	Autores
07 - 1981	18	52	Morwen Thistlethwaite.
04 - 1992	18	42	Hans Kloosterman.
05 - 1992	18	39	Michael Reid.
05 - 1992	18	37	Dik Winter sólo un día después que Reid.
01 - 1995	18	29	Michael Reid.
01 - 1995	20	29	Michael Reid.
12 - 2005	20	28	Silviu Radu.
04 - 2006	20	27	Silviu Radu.
05- 2007	20	26	Dan Kunkle y Gene Cooperman.
03- 2008	20	25	Tomas Rokicki.
04 - 2008	20	23	Tomas Rokicki y John Welborn.
08 - 2008	20	22	Tomas Rokicki y John Welborn.
07- 2010	20	20	Tomas Rokicki, Herbert Kociemba, Morley Davidson y John Dethridge .

Se ha de incidir en que son cotas. Es decir, en julio de 1981 se demostró que 52 movimientos son suficientes para, a partir de cualquier configuración, se puede ordenar el cubo y que harían falta 18 o más. Por tanto, el Número de Dios estaba entre 18 y 52.



Se tardaron unos quince años en demostrar que éste número sería 20 o mayor y otros quince en demostrar que realmente no hacían falta más.

Según los descubridores de este número, separaron todas las posibles disposiciones del cubo en 2.217.093.120 grupos de 19.508.428.800, por diversos criterios redujeron el número de grupos a 55.882.296 y tras 35 años de tiempo de CPU llegaron a su solución.

MATEMÁTICAS Y ACCIDENTES DE TRÁFICO

Algunas expresiones matemáticas ayudan a explicar determinadas características de los accidentes de tráfico. Existen opiniones encontradas en cuanto al lugar que debe guardar las matemáticas en la investigación de los accidentes de tráfico. Una de ellas sostiene que la investigación físico matemática es fundamental. Por otro lado algunos le dan un papel únicamente auxiliar. En cualquier caso su aplicación no es sencilla. Este artículo recoge la aplicación de la parte de las matemáticas que un estudiante de secundaria puede comprender.

Cuando un conductor percibe un riesgo, inicia una serie de procesos para evitar el peligro o hacerlo menos grave, estos procesos dependen de aspectos dinámicos, anímicos, conductuales, siendo los más usados las maniobras evasivas hacia izquierda o derecha así como el proceso de frenada de emergencia.
En un proceso normal de maniobra de emergencia es aproximadamente así: el conductor observa el peligro, a partir de este instante transcurre un tiempo hasta pisar el freno o realizar alguna maniobra, por ejemplo girar. Si el conductor decide frenar, al actuar los frenos, las llantas disminuyen su velocidad de giro y si se pisa fuertemente el pedal se pueden bloquear las llantas, por lo que el vehículo finalmente se desplaza un trayecto frenando con llantas a punto de bloquearse o deslizando antes de detenerse totalmente, en este último caso es posible que quede marcada una huella de frenada.
En los anteriores procesos se involucran dos distancias recorridas por el vehículo, primero la distancia que recorre el vehículo durante el tiempo de reacción del conductor, llamada distancia de reacción $\mathbf{d_R}$, y segundo la distancia que recorre el vehículo durante la frenada $\mathbf{d_F}$, la distancia total de parada $\mathbf{d_T}$, es la suma de las dos: $\mathbf{d_T = d_R + d_F}$.

1. Distancia que necesita un coche a velocidad *v* para detenerse frenando con bloqueo.

$$D_T = \frac{v^2}{2 \cdot \mu \cdot g}$$

D_T = Distancia total recorrida medida en metros.
v = Velocidad del vehículo medida en m./sg.
g = Aceleración de la gravedad: 9,8 m./sg^2.
μ = Coeficiente de rozamiento entre las ruedas del vehículo y el asfalto. En asfalto seco este valor está entre 0’7 y 0’8.

Esta fórmula permite determinar la distancia total recorrida por un coche que se desplaza inicialmente a una velocidad *v*, desde que comienza el proceso de frenado con bloqueo de llantas. Se debe tener en cuenta que durante el proceso de frenado la desaceleración del vehículo se asume como constante. Además, la ecuación –como todas las posteriores- es válida para procesos de frenado en superficies horizontales.

Obsérvese que si se duplica la velocidad, se necesita el cuádruple de distancia para parar.

2. Velocidad del vehículo según la longitud de la huella de frenado.
En la ecuación anterior, puede despejarse la velocidad del coche cuando inició la maniobra de frenado:

$$v = \sqrt{2 \cdot \mu \cdot g \cdot D_T}$$

Lo que permite determinar dicha velocidad midiendo la longitud de la huella de frenado.

3. Velocidad del vehículo según la longitud de la huella de frenado hasta el impacto.
Si el coche en proceso de frenado choca contra algo antes de detenerse, puede calcularse la velocidad que llevaba, *v*, a partir de la longitud de la huella de frenado, D_T y la velocidad en el momento del impacto, v_{imp}, que puede calcularse por otros métodos, por ejemplo a partir de las deformaciones sufridas.

$$v = \sqrt{2 \cdot \mu \cdot g \cdot D_T + v_{imp}^2}$$

Se debe tener en cuenta que la desaceleración se considera constante y que la ecuación es válida solo para superficies horizontales.

4. Velocidad del vehículo según la distancia recorrida y la desaceleración efectiva.
Esta ecuación permite determinar la velocidad de un vehículo, que se desplazó una distancia d_t hasta detenerse sin dejar ningún tipo de huella. Se asume que la deceleración fue constante.

$$v = \sqrt{2 \cdot \mu_{ef} \cdot g \cdot d_t}$$

μ = Coeficiente de rozamiento efectivo, varía entre 0’4 y 0’8.

5. Velocidad con que es lanzado un peatón según la distancia a que se detiene.

$$v_p = \left[\sqrt{\frac{2h}{g} + \frac{2d}{\mu \cdot g}} - \sqrt{\frac{2h}{g}} \right] \cdot \mu \cdot g$$

Con esta ecuación se determina la velocidad con que un peatón sale despedido en un atropello tras el impacto a partir de *d*, la distancia entre el punto de atropello y la posición final del peatón. En ella:

μ = Coeficiente de fricción entre el asfalto y el peatón (0,9).

h = Altura del centro de masa del peatón, en metros. El impacto ha de producirse por encima de este centro de masas.

Existe otra fórmula para calcular la velocidad con que se proyecta un peatón en un atropello, es la fórmula de Searle, calcula la velocidad mínima y es esta:

$$v_p = \sqrt{2\mu \cdot g \frac{d + \mu \cdot h}{1 + \mu^2}}$$

6. Velocidad del vehículo según la distancia recorrida desde que observa un obstáculo hasta que se detiene por completo.
Desde que un conductor ve un obstáculo hasta que pisa el pedal de freno trascurre, como se ha mencionado, el tiempo de reacción t_r, si la distancia total recorrida por el vehículo es *d*, entonces la velocidad que llevaba al inicio (al observar el obstáculo) viene dada por:

$$V = \left(\sqrt{t_r^2 + \frac{2d}{\mu \cdot g}} - t_r \right) \cdot \mu \cdot g$$

μ = Coeficiente de rozamiento entre las ruedas del vehículo y el asfalto. En asfalto seco este valor está entre 0’7 y 0’8.

7. Velocidad máxima de un vehículo para no derrapar en una curva.
La velocidad máxima con que un vehículo puede entrar en una curva no peraltada de radio *r* sin derrapar, viene dada por:

$$V = \sqrt{\mu \cdot g \cdot r}$$

Si la curva está peraltada un ángulo α,

$$V = \sqrt{\frac{r \cdot g \cdot (\mu + \tan\alpha)}{1 - \mu \cdot \tan\alpha}}.$$

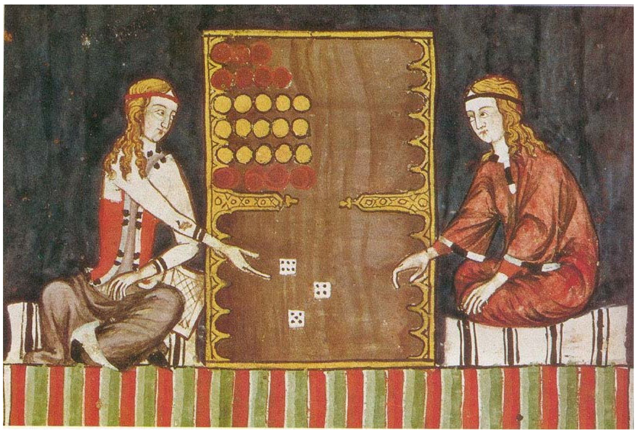
8. Velocidad mínima de un vehículo para volcar en una curva.
Si un vehículo cuyo centro de masas está a una altura *h* entra en una curva de radio *r* con velocidad suficiente, éste puede volcar. Si la distancia transversal entre las llantas y el centro de gravedad del vehículo es *b*. Entonces se producirá el vuelco si su velocidad supera:

$$V = \sqrt{\frac{b \cdot g \cdot r}{h}}$$

UNA HISTORIA DE LA PROBABILIDAD

A pesar de que existen estudios sobre el juego de los dados anteriores al siglo XV, la carencia de una notación numérica adecuada podría explicar el hecho de que matemáticos anteriores trabajaran en este tema.
Probablemente fueron los árabes los primeros en planteárselo, de hecho la palabra albur, que se utilizaba para designar el azar es árabe, así como la palabra azar, que provienede zahr, flor del naranjo con la que representaban el as en uno de los lados del dado. De hecho, los primeros probabilísticos europeos fueron italianos del siglo XV, que recibieron la influencia árabe a través del norte de África, y que desarrollaron simultáneamente la aritmética y la probabilidad.

Durante el Renacimiento empiezan a surgir inquietudes entorno a contar el número de posibles resultados de un dado lanzado varias veces, o problemas más prácticos sobre cómo repartir las ganancias de los jugadores cuando el juego se interrumpe antes de finalizar. Estas inquietudes surgen de cara a hacer repartos justos u obtener ventajas en juegos de azar más que de verdaderas inquietudes matemáticas. De hecho la idea de modelizar el azar mediante las matemáticas aún no estaba plenamente presente en los intelectuales de la época.



Uno de los primeros problemas dedicados a contabilizar el número de posibles resultados al lanzar un dado varias veces se encuentra aún en la Edad Media, en el poema *De Vetula* de Richard de Fournival (1200-1250) donde afirma correctamente que si se lanzan tres dados hay 216 combinaciones posibles y calcula acertadamente los diferentes valores para la suma de los tres dados.

Pero el problema más importante relativo a los juegos de azar era el conocido como “problema del reparto de apuestas” que distribuía las ganancias entre jugadores cuando la partida se interrumpía antes de finalizar. Este problema fue abordado por **Luca Pacioli** (1445-1517) quien en 1487 propuso estos dos problemas particulares. Un juego, en el que el premio es de 22 ducados, consiste en alcanzar 60 puntos. Se interrumpe cuando un equipo lleva 50 puntos y el otro 30. En el segundo, tres arqueros que compiten por un premio de 6 ducados lanzan flechas hasta que uno de ellos haga 6 dianas, siendo interrumpidos cuando el primero de ellos lleva 4 dianas, el segundo 3 y el tercero 2. ¿Cómo deben repartirse los premios entre los contendientes?

Luca Pacioli

Pacioli propuso que el premio debería ser repartido en función de las victorias obtenidas anteriormente: así, el premio del primer problema se dividía en 60×5/8 ducados para el primer equipo y en 60×3/8 para el segundo; para el problema de los arqueros, el premio se dividía en la proporción 4/9, 3/9 y 2/9. Como más tarde se pondría de manifiesto, esta solución obtenida por Pacioli es injusta.

Fue **Girolamo Cardano** (1501-1576) quien escribió la primera obra importante relacionada con el cálculo de probabilidades en los juegos de azar. Fue en 1565 y se llamaba *Libro de los juegos de azar.* Además Cardano se había ocupado anteriormente del problema del reparto de apuestas y en 1539 llegó a la conclusión de que la solución de Pacioli era incorrecta porque al considerar tan sólo el número de juegos ganados por cada equipo, no contaba cuántos juegos debían ganar para hacerse con el premio.

Girolamo Cardano

Cardano propuso como solución del problema que si n es el número de juegos totales y a y b los juegos ganados por cada equipo, el premio debía repartirse de la siguiente manera:

$$[1+2+\ldots+(n-b)]: [1+2+\ldots+(n-a)].$$

Esta solución es, en general, incorrecta y sólo da resultados válidos en casos particulares.

Nicolo Fontana

Nicolo Fontana "Tartaglia" (1499–1557), también intentó resolver este problema y en 1556 publicó un libro en el que descartaba la solución dada por Pacioli y daba su propia solución: si un equipo ha ganado a puntos y el otro b, se juega a n puntos y el premio total es P, las ganancias deberían repartirse de la forma: $(P/2)\pm P[(a-b)/n]$ siendo la cantidad mayor para el equipo que tenga más victorias. Sin embargo, Tartaglia fue consciente de que su solución no era la correcta y en su libro dejaba claro que era buena para impartir justicia y equilibrio a un reparto, pero no era exacta desde el punto de vista matemático.

Además de estos tres nombres importantes, entre los precursores de la probabilidad destacó también un hombre mucho más conocido en otros campos de las matemáticas y la física como fue **Galileo Galilei**, que durante su vida también resolvió problemas sobre dados, hasta tal punto que escribió un libro llamado *Sobre la puntuación en tiradas de dados.* Sin embargo, la mayor aportación de Galileo a los inicios de la probabilidad fue la invención de su teoría de la medida de errores. Clasificó los errores en dos tipos: "sistemáticos" y "aleatorios", clasificación que se mantiene aún en la actualidad y estableció cuidadosamente las propiedades de los errores aleatorios. Con esto contribuyó sin saberlo a la creación de ramas fundamentales de la estadística y la probabilidad posterior.

Galileo Galilei

Cierto día del año 1654, **Blaise Pascal** (1623 - 1662) matemático francés, hacía un viaje en compañía de un jugador profesional conocido como el caballero de Meré, siendo además un hombre noble e ilustrado.

Blaise Pascal

Este caballero creía que había encontrado una "falsedad" en los números al analizar el juego de los dados, observando que el comportamiento de los dados era diferente cuando se utilizaba un dado que cuando se empleaban dos dados. La "falsedad" partía simplemente de una comparación errónea entre las probabilidades de sacar un seis con un solo dado o de sacar un seis con dos dados. Para el caballero debía existir una relación proporcional entre el número de

jugadas necesarias para conseguir el efecto deseado en uno y otro caso. El problema estaba en que el citado caballero no tuvo en cuenta que en el segundo caso estaba analizando una probabilidad compuesta en donde las distintas probabilidades se deben calcular multiplicativamente.
Este y otros problemas planteados por el caballero a Pascal sobre cuestiones relacionadas con diferentes juegos de azar, dieron origen a una correspondencia entre Pascal y algunos de sus amigos matemáticos, sobre todo con **Pierre de Fermat** (1601-1665) de Toulouse, abogado y gran amante de las matemáticas.
Esta correspondencia constituye el origen de la teoria moderna de la probabilidad.

Pierre de Fermat

En una carta de Pascal a Fermat, en la que narraba la anécdota anteriormente mencionada, concluía que "el caballero de Meré tiene mucho talento, pero no es geómetra; ésto es, como sabéis un gran defecto".
Otro de los problemas planteados por el caballero a Pascal fue resuelto por éste y Fermat de manera independiente, llegando ambos a la misma solución: En una partida de dados intervienen dos jugadores y apuestan 32 doblones de oro cada uno, eligiendo un número diferente, gana el juego el primero que obtenga tres veces el número que eligió. Después de un rato de juego, el número elegido por el primer apostador ha salido dos veces mientras el otro jugador sólo una vez ha acertado, en este instante la partida debe suspenderse. ¿Cómo dividir los 64 doblones de oro apostados? En la correspondencia que siguió a este problema, tanto Pascal como Fermat estuvieron de acuerdo en que el primer jugador tiene derecho a 48 doblones de oro.
Esperamos que el amable lector nos permita proponer este mismo problema dentro de nuestros *tres problemas un poco difíciles* que cierran este número. Prometemos incluir la solución en el boletín de marzo.

Veamos también el último de los problemas históricos (al ser su solución parte del inicio de la probabilidad actual) que propuso Meré y resolvieron Pascal y Fermat:
El juego consistía en lanzar 24 veces un par de dados y el problema era decidir si es lo mismo apostar a favor o en contra de la aparición de por lo menos un seis doble.
Sea A= {No sacar un seis doble en una tirada de dos dados}, P(A)=35/36.
Entonces, P(no sacar "doble 6" en veinticuatro intentos) = $(35/36)^{24} \approx 0{,}50859$. Y por tanto, la probabilidad del suceso contrario será $1-0{,}50859 \approx 0{,}49141$.
Luego es más probable no obtener una vez un seis doble en 24 tiradas que obtenerlo al menos una vez. En cambio para 25 tiradas cambian las cosas pues $(35/36)^{25} \approx 0{,}495$ y por tanto $1-0{,}495 \approx 0{,}505$ siendo mejor apostar por el seis doble.

Pascal y Fermat resolvieron este problema y otros muchos y fueron los que empezaron a formalizar la teoría de las probabilidades, probando el desacuerdo con el caballero de Meré, este se debía a que era erróneo el cálculo que había efectuado, ya que se equivocó en considerar equiprobables sucesos que no lo eran, y sólo cuando los casos posibles son equiprobables tiene sentido aplicar la definición dada por Meré de probabilidad. Sin embargo, Pascal erró al intentar extender algunos de los resultados de los problemas del caballero al caso en el que hubiera tres o más jugadores.
Ni Pascal ni Fermat expusieron sus resultados por escrito y fue el físico-matemático holandés **Christian Huygens** (1629-1695) quien en 1657 publicó un breve tratado titulado *"De Ratiocinnis in ludo aleae"* (sobre los razonamientos relativos a los juegos de dados) inspirado en la correspondencia sostenida entre los dos creadores de la teoría de la probabilidad. Además Huygens extendió algunos resultados

de Pascal y aclaró varios problemas para tres o más jugadores.

Christian Huygens

Problema de Galileo, o de los tres dados.
El duque de Toscana le preguntó un día a Galileo: ¿por qué cuando se lanzan 3 dados se obtiene más veces la suma 10 que la suma 9, aunque se obtenga de 6 maneras diferentes cada una?

La urna de Polya.
Imagina que tenemos una urna que contiene bolas de dos colores distintos, blancas y rojas. Extraemos una bola y si resulta ser blanca la devolvemos a la urna, y si es roja la devolvemos acompañada de unas cuantas bolas más del mismo color. A continuación, volvemos a sacar otra bola y repetimos la operación. Claramente lo que ocurre en una extracción condiciona lo que va a pasar en la siguiente.
Este tipo de urna lo utilizó el matemático húngaro George Polya para modelizar la evolución de fenómenos como las enfermedades contagiosas.
Imagina que inicialmente tenemos 6 bolas, 4 blancas y 2 rojas y que devolvemos cada bola roja acompañada por otras dos del mismo color ¿Cuántas extracciones tenemos que hacer, como mínimo, para que el número de rojas supere al de blancas?

Por si al lector le apetece jugar un poco: Los cinco problemas de Huygens.

1. A y B juegan uno contra el otro, con dos dados, bajo la condicion de que A gana si obtiene 6 puntos, y B gana si obtiene 7 puntos. Le corresponde el primer tiro a A, los dos siguientes a B, los otros dos siguientes a A, y así sucesivamente, hasta que gane alguno de los dos jugadores. La pregunta es: ¿Cuál es la razón entre las probabilidades de ambos? Respuesta: 10,355 para A frente a 12,276 para B.Nota: Este problema fue propuesto por Fermat en carta a Huygens en junio de 1656, y resuelto por Huygens en carta a Carcavi el 6 de julio de 1656.

2. Tres jugadores A, B y C, tienen 12 fichas: cuatro blancas y ocho negras. Juegan con la condición, de que gana el primer jugador que obtiene (al extraer sin mirar) una ficha blanca. A extrae primero, luego B, luego C, luego A nuevamente, y asi sucesivamente. ¿Cuál es la razón entre las probabilidades de ganar de cada jugador con respecto de los otros? Respuesta: 9:6:4
Nota: Este problema fue resuelto por Huygens en 1665

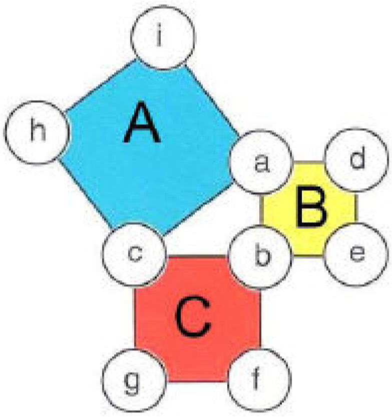
3. A apuesta a B que de un mazo de 40 cartas,10 de cada palo, extraerá 4, de forma que obtendrá una de cada palo. La probabilidad de ganar de A sobre la de B es de 1000 contra 8139.
Nota: Este problema fue propuesto por Fermat en carta a Huygens en junio de 1656; la respuesta sin prueba está en la carta a Carcavi del 6 de julio de 1656.

4. Como antes, dos jugadores tienen 12 fichas, cuatro blancas y ocho negras; A apuesta a B que sacando siete fichas sin mirar, obtendrá al menos tres blancas. La pregunta es ¿Cuál es la razón entre sus probabilidades? Nota: Este problema fue resuelto por Huygens en 1665

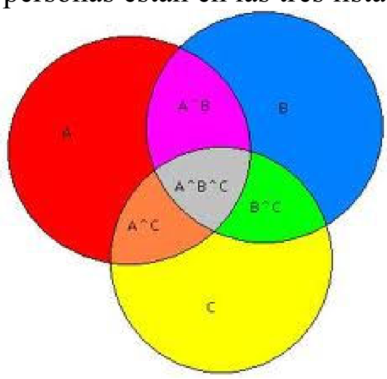
5. Dos jugadores, A y B, tiene 12 cada uno doce fichas. Juegan con tres dados con la condición de que si al lanzarlos se obtienen 11 puntos, A entrega una ficha a B, si se obtienen 14, B entrega una a A, ganando el jugador que obtiene primero todas las fichas. Aquí se encuentra que las probabilidades de A frente a las de B son de 244.140.625 a 282.429.536.481. Nota: Este es el problema planteado por Pascal a Fermat y a través de Carcavi a Huygens en una carta del 28 de setiembre de 1656 que contiene las soluciones dadas por Pascal y Fermat. La solución de Huygens está en la carta a Carcavi del 12 de octrubre de 1656, y la demostración en una nota de 1676. Este problema se conoce como el *problema de la ruina del jugador*.

Tres problemas fáciles

1. Escribe los números del 1 al 9 en los vértices de cada uno de los cuadrados, de modo que la suma de los vértices de A, la de los de B y la de los de C sean la misma cantidad.



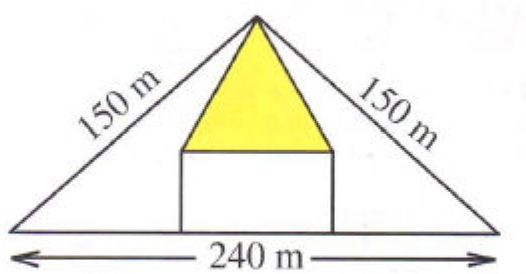
2. En los campeonatos de nuestro instituto se han inscrito 50 alumnos. Para jugar al fútbol se han apuntado 29, para baloncesto 23 y para tenis 17. Como ves, hay gente que se ha apuntado a varios deportes. En particular, las listas de fútbol y tenis tienen 8 personas comunes. Las de tenis y baloncesto, 7 y las de fútbol y baloncesto, 6. ¿Cuántas personas están en las tres listas?



3. Si decimos que los números 13 y 31 son "contrarios", como 123 y 321. Y que un número es "depresivo" si es contario de sí mismo. ¿Cuántos números depresivos hay de tres cifras?

Tres problemas un poco difíciles (y uno de propina)

1. El Profesor Sarogatip es un poco caprichoso, en su testamento ha dejado a sus cuatro hijos un campo de forma de triángulo isósceles con las siguientes medidas:



El Profesor ya ha dividido el campo en cuatro partes de igual superficie. Como ves, una parte es triangular y otra rectangular. Las otras son dos cuadriláteros iguales. ¿Cuál es el perímetro de cada campo?

2. En una partida de dados intervienen dos jugadores y apuestan 32 doblones de oro cada uno, eligiendo un número diferente. Se lanza el dado una vez tras otra, gana el juego el primero que obtenga tres veces el número que eligió. Después de un rato de juego, el número elegido por el primer apostador ha salido dos veces mientras el del otro jugador sólo una vez, en este instante la partida debe suspenderse. ¿Cómo dividir los 64 doblones de oro apostados de forma justa? ¿Por qué?

3. Intenta resolver el primer problema fácil añadiendo estas condiciones: $a<c$; $d<e<f<g$; $h<i$ y h impar.

+1 ¿Puedes encontrar un número de cuatro cifras cuyo "contrario" sea su cuádruplo?

Envíanos tus respuestas y participarás en nuestros sorteos. Recuerda nuestras direcciones:
materranya@yahoo.es
http://www.catedu.es/materranya
http://materranya.iespana.es