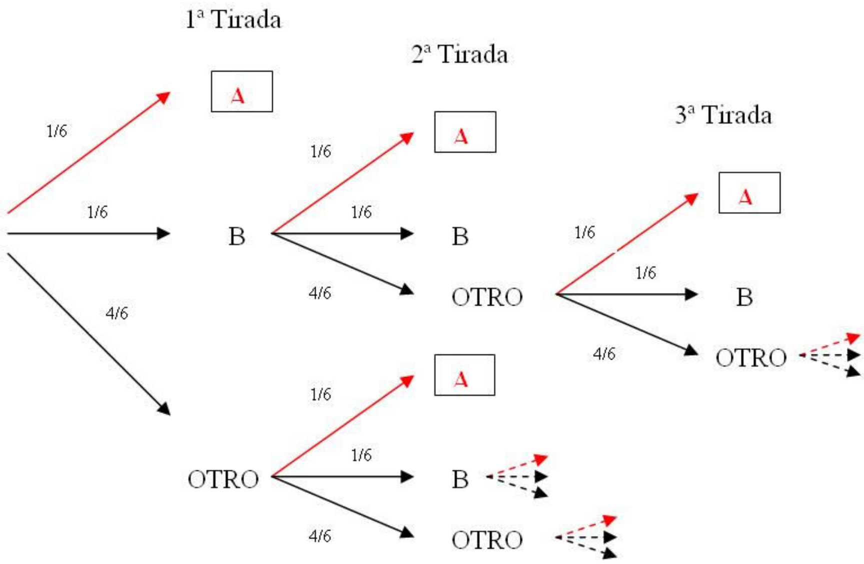
BOLETÍN DE MATEMÁTICAS DEL I.E.S. MATARRAÑA – Número 27 - MARZO 2.011

LO PROMETIDO ES DEUDA

En el número anterior dejábamos abierto a nuestros lectores el problema siguiente, planteado por el caballero de Meré a Pascal, resuelto por éste y por Fermat de manera independiente: En una partida de dados dos jugadores, A y B, apuestan 32 doblones de oro cada uno, eligiendo cada uno un número diferente. Gana el primero que obtenga tres veces el número que eligió. Después de un rato de juego, el número del primer apostador ha salido dos veces mientras el del segundo sólo una, en este instante la partida debe suspenderse. ¿Cómo dividir los 64 doblones de oro apostados? La respuesta es, que para ser justos, el primer jugador tiene derecho a 48 doblones de oro. A continuación se expone la resolución.



Calculemos, apoyándonos en la figura anterior, únicamente la probabilidad de que, a partir de la situación en que el juego queda interrumpido, gane *A*.

En la primera tirada, si sale su número, gana con probabilidad *1/6*. Si en la primera tirada sale *B*, la partida debe continuar. A partir de ahí la probabilidad de ganar *A* es:

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{4}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{4}{6}\right)^3\cdot\frac{1}{6} + \cdots$$

Esta es la suma de los infinitos términos de una progresión geométrica de razón 4/6, su suma es:

$$S_\infty = \frac{1/36}{1-(4/6)} = \frac{1}{12}$$

Así pues, si en la primera tirada sale el número de *B*, la probabilidad de que, a partir de ahí, gane *A* será *1/12*. Luego, la probabilidad de que gane *A* si en la primera tirada sale su número o el de *B* es

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{1}{4}.$$

Si en la primera no sale ni el número de *A* ni el de *B*, lo que ocurre con probabilidad *4/6*, la partida debe continuar con una segunda tirada.

Como antes, si en esta segunda tirada sale el número de *A*, gana con probabilidad $\frac{4}{6}\cdot\frac{1}{6}$, y si sale el número de *B*, *A* gana con probabilidad $\frac{4}{6}\cdot\frac{1}{12}$. Si sale otro número hay que repetir el proceso. Luego, la probabilidad de que gane *A* si en la primera tirada sale "*otro*" número y en la segunda su número o el de B, es

$$\left(\frac{4}{6}\right)\cdot\frac{1}{6}+\left(\frac{4}{6}\right)\cdot\frac{1}{12}=\left(\frac{4}{6}\right)\cdot\frac{1}{4}$$

Así, la probabilidad de ganar de *A*, recurriendo a nuevas tiradas, tras ***n*** veces saliendo "*otro*" resultado será:

$$\left(\frac{4}{6}\right)^n\cdot\frac{1}{6}+\left(\frac{4}{6}\right)^n\cdot\frac{1}{12}=\left(\frac{4}{6}\right)^n\cdot\frac{1}{4}$$

desde *n=0* hasta infinito. La suma de esta nueva progresión geométrica es ¾.

Por tanto, la probabilidad que tendría *A* de ganar si el juego continuase es del 75%. Así que lo justo es que *A* se lleve tres cuartas partes del dinero apostado: 48 doblones y *B* una cuarta parte: 12 doblones.

GENERALIZACIÓN DE LA REGLA DE RUFFINI PARA LA DIVISIÓN DE POLINOMIOS ARBITRARIOS.

Todos los alumnos de secundaria aprenden a utilizar las Regla de Ruffini para las divisiones del tipo P(x) : (x-a), algunos se preguntan si también puede utilizarse cuando el divisor es, por ejemplo, 2x-3. Si, puede hacerse. E incluso se puede dividir entre un divisor de cualquier grado. El método utilizado es el Algoritmo de Horner, que generaliza el de Ruffini, y explicamos a continuación.

Paolo Ruffini (1765 – 1822) fue un matemático y médico italiano. Estudió matemáticas, literatura, filosofía, medicina y biología en la Universidad de Módena. Se graduó en 1788, y fue nombrado rector de la misma universidad en 1814.

Para comenzar, recordemos la Regla de Ruffini con un sencillo ejemplo: $(3x^4-5x^2+7x-5):(x+2)$. Con ⊗ indicamos que esa posición ha de permanecer vacía.

	3	0	-5	7	-5
-2	⊗	-2·3=-6	-2·-6=12	-2·7=-14	-2·-7=14
	3	-6	7	-7	9

Así, el cociente es $3x^3-6x^2+7x-7$ y el resto es 9. ¿Qué ocurre con la división $(3x^4-5x^2+7x-5):(3x+2)$? En este caso se considera:

$$(3x^4 - 5x^2 + 7x - 5) : 3 \cdot \left(x + \frac{2}{3} \right)$$

Ahora se hace la división:

	3	0	-5	7	-5
-2/3	⊗	-2	4/3	22/9	-170/27
	3	-2	-11/3	85/9	-305/27

El cociente es $\frac{1}{3} \cdot \left(3x^3 - 2x^2 + -\frac{11}{3}x + \frac{85}{9} \right)$ y el resto -305/27.

En una división con divisor de grado mayor que 1 se ha de comenzar, como en Ruffini, preparando la tabla. Veamos un ejemplo: $(4x^2-3x+2):(x^2+3x-2)$, la tabla será:

	4	-3	2
2	⊗	⊗	
-3	⊗		⊗
	cociente	resto	

Obsérvese que esperamos un cociente de grado cero y un resto de grado uno o cero. Bien, el proceso, que aparece a continuación, podrá ser seguido por el lector sin explicación alguna por nuestra parte.

	4	-3	2
2	⊗	⊗	2*4=8
-3	⊗	-3*4=-12	⊗
	4	-15	10

Es decir, el cociente es 4 y el resto -15x+10.

Vamos con otro ejemplo: $(4x^3-3x^2+2):(x^2-3x+1)$, que ha de tener cociente y resto de primer grado.

	4	-3	0	2
-1	⊗	⊗	-1·4=-4	-1·9=-9
3	⊗	3·4=12	3·9=27	⊗
	4	9	23	-7

Con lo que el cociente es 4x+9 y el resto 23x-7.

Como el lector habrá observado, el número de filas de la caja y las casillas que han de quedar vacías dependen del grado del divisor. El número de columnas depende del grado del dividendo. Veamos un ejemplo con un divisor de grado 3, $(2x^5-4x^4+3x^2+2):(x^3-2x^2-3x+1)$, cuyo cociente tiene grado 2 y el resto grado 2 (o inferior)

	2	-4	0	3	0	2
-1	⊗	⊗	⊗	-1·2=-2	-1·0=0	-1·6=-6
3	⊗	⊗	3·2=6	3·0=0	3·6=18	⊗
2	⊗	2·2=4	2·0=0	2·6=12	⊗	⊗
	2	0	6	13	18	-4

Con lo que el cociente es $2x^2-6$ y el resto $13x^2+18x-4$. A partir de aquí dejamos solo al lector, ya puede realizar cualquier división con este algoritmo, incluso puede intentar dividir con divisores cuyo coeficiente director no sea 1, como en nuestros ejemplos. Por cierto, si se toma la molestia de hacer estas mismas divisiones con el algoritmo tradicional, verá que se realizan las mismas operaciones, sólo se simplifica la escritura.

DOS PROBLEMAS MÁS DE PROBABILIDAD

A continuación explicamos dos problemas más de probabilidad que destacan de manera especial porque su resultado va en contra de nuestra intuición. El primero es el Problema de Monty Hall. No, Monty Hall no es un matemático, es un presentador de televisión de cuyo programa surgió el problema. El segundo es fácil de enunciar: ¿Cuántas personas hacen falta en una reunión para que la probabilidad de coincidencia de una fecha de cumpleaños sea mayor que una dada, por ejemplo el 50%?

En el concurso televisivo estadounidense *Let's make a deal* (Hagamos un trato) el participante se enfrenta a tres puertas cerradas. Tras una de ellas se halla un coche, en las dos restantes hay una cabra en una y nada en la otra. Una vez que el concursante ha elegido una puerta y comunica al público y al presentador su elección, Monty Hall, que sabe lo que hay detrás de cada puerta, abre una de las otras dos, mostrando o la cabra o que la puerta no tiene regalo detrás. En este momento se da la opción al concursante de cambiar, si lo desea, de puerta (tiene dos opciones) ¿Debe el concursante mantener su elección original o cambiar y escoger la otra puerta? En principio parece que da igual, el concursante ha de elegir entre dos puertas, una esconde el coche y la otra un regalo malo (una cabra o nada).
La realidad es que, en general, beneficia cambiar de puerta. Este es un problema que ha generado muchas discusiones y muchos artículos. Vamos a dar una explicación sencilla.

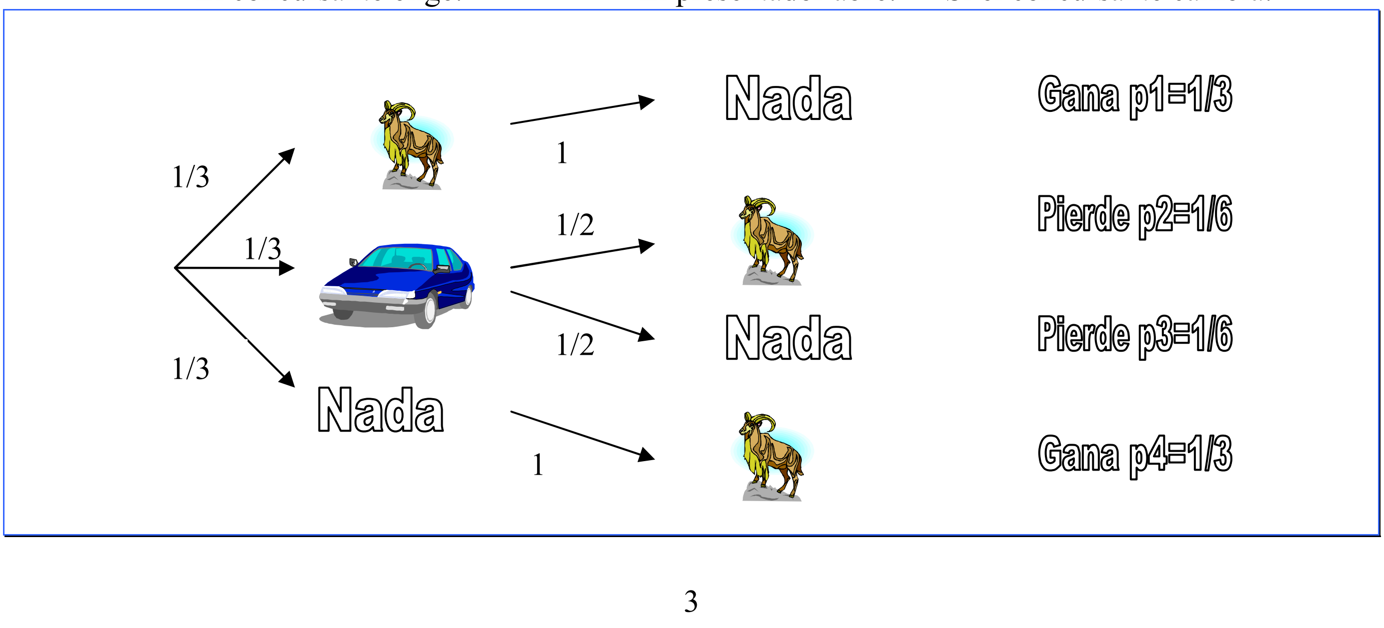
El primer lugar el concursante puede elegir la puerta que esconde el coche, la de la cabra o la vacía con probabilidad 1/3. Está claro que él no sabe qué ha elegido.

A continuación el presentador, Monty Hall, abre una puerta que no esconde el coche. Esta es la parte importante del razonamiento: si el concursante eligió la puerta de la cabra, el presentador sólo puede abrir la puerta vacía. Si eligió la vacía, abrirá la de la cabra. Pero si el jugador eligió la puerta que oculta el coche, Monty puede abrir o bien la de la cabra o bien la vacía, con lo que la situación es la recogida en la imagen de abajo. Así, si el concursante cambia de elección, su probabilidad de ganar es

$$p_1 + p_4 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

frente a la probabilidad de ganar si no cambia: 1/3.
Nada asegura que cambiar de puerta sea la opción ganadora, la probabilidad dice que es una estrategia que le beneficia (aumentando las probabilidades de ganar), pero el azar es el que sigue decidiendo.
Si todavía no está muy claro, piense en esta generalización: hay 100 puertas, una esconde un coche y 99 una cabra cada una, el concursante elige una y el presentador abre 98 puertas con cabra, dejando al concursante la opción de cambiar o no su puerta. ¿Aún sigue pensando que da igual?

El concursante elige: El presentador abre: Si el concursante cambia:



Otro problema clásico es el llamado *de los cumpleaños*. Fue descrito en la *American Mathematical Monthly* en 1938, en un artículo sobre técnicas de estimación de Zoe Emily Schnabel: *La estimación del número de peces de un lago*. Se trata de calcular qué probabilidad existe de que en un grupo de personas dos de ellas o más hayan nacido el mismo día del año. La primera vez que se aborda este problema sorprende saber que si el número de personas es 23 o superior esta probabilidad supera el 50%. Así, es "normal" que en una clase de unos 25 alumnos se produzca esta coincidencia de cumpleaños.

Vamos a comenzar resolviendo un problema más sencillo, calcular la probabilidad de que dos personas, elegidas al azar, hayan nacido en la misma fecha: día y mes, suponiendo que es igual de probable nacer en una cualquiera. Esta probabilidad es difícil de calcular de manera directa. Sin embargo, es más fácil resolver el caso contrario, es decir calcular la probabilidad de que dos personas, elegidas al azar, no hayan nacido en la misma fecha. Haremos uso de la Regla de Laplace y del hecho de que si dos sucesos son independientes, la probabilidad de que ocurran ambos es el producto de sus probabilidades. La probabilidad es la siguiente:

$$p_2 = \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \approx 0{,}9972$$

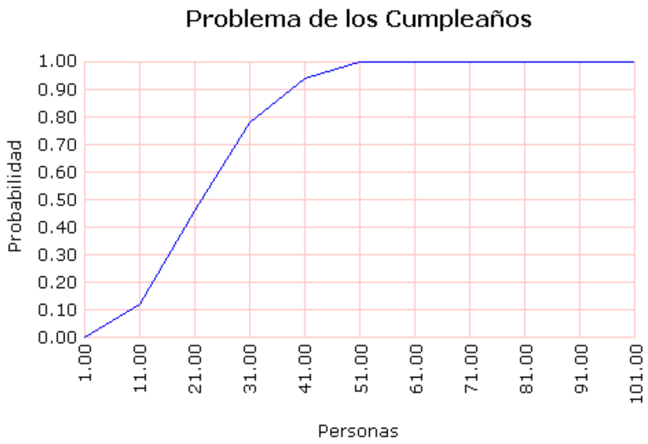
Aceptando que la primera puede haber nacido en cualquier fecha, para que no haya coincidencia, la segunda dispone de 364 fechas favorables de las 365 posibles. Luego hay, aproximadamente un 99'72% de probabilidades de que las fechas no coincidan y, por tanto, un 0'28% de que lo hagan.

Entendido esto, se puede extender el resultado a una reunión de *n* personas. La probabilidad de que no haya coincidencia es:

$$p_n = \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \cdots \cdot \frac{365-(n-1)}{365} = \frac{365!}{(365-n)! \cdot 365^n}$$

Y la probabilidad de que haya coincidencia será $1-p_n$.

En el caso de que n=*23*, $p_{23} \approx 0'4927$ y, por tanto, la probabilidad de que entre 23 personas haya al menos una coincidencia de fecha de nacimiento es mayor que el 50%. Y si consideras un grupo de 50 personas, la probabilidad de coincidencia es superior al 97%. El siguiente grafico recoge la probabilidad de coincidencia $1-p_n$.



La siguiente tabla recoge alguno de los valores para p_n y $1-p_n$

n	p_n	$1-p_n$
2	0,997260274	0,00273973
5	0,972864426	0,02713557
10	0,883051822	0,11694818
15	0,74709868	0,25290132
20	0,588561616	0,41143838
25	0,431300296	0,56869970
30	0,293683757	0,70631624
35	0,185616761	0,81438324
40	0,10876819	0,89123181
45	0,059024101	0,94097590
50	0,02962642	0,97037358
55	0,013737711	0,98626229
60	0,005877339	0,99412266
65	0,002316893	0,99768311
70	0,000840424	0,99915958
75	0,000280122	0,99971988
80	8,56681E-05	0,99991433

Otro problema similar que nos podemos plantear es la siguiente: Elegimos un alumno concreto de la clase, ¿qué probabilidad existe de que algún otro de la clase haya nacido el mismo día?

¿POR QUÉ MENOS POR MENOS ES MÁS?

Tal vez sea esta una de las preguntas que más formulan los alumnos. Existen varias formas de "demostrarlo". Algunas hablan de subir y bajar escaleras hacia el frente o de espaldas, la verdad es que no son muy claras. En este breve artículo intentaremos dar una explicación clara e intuitiva.

Al multiplicar dos números naturales, por ejemplo el 3 y el 5, se suma 3 veces el 5 para obtener 15. O al revés, se suma 5 veces el 3 para obtener 15.

$$3 \cdot 5 = 3+3+3+3+3=5+5+5=15$$

No hay más misterio. Tres cajas de cinco bombillas, como cinco cajas de tres, son 15 bombillas. No hay más.

¿Y 3 por -5? Si tengo tres recibos de modo que cada uno indica que debo 5 euros, el total, claro está, es que debo quince: $3 \cdot -5 = -15$. Pero, ¿qué significa $-3 \cdot -15$?

Hay una parte de la tabla de multiplicar del 3 que todos hemos visto:

$$\begin{array}{ccccc} 3 & \cdot & 3 & = & 9 \\ 3 & \cdot & 2 & = & 6 \\ 3 & \cdot & 1 & = & 3 \\ 3 & \cdot & 0 & = & 0 \end{array}$$

No es difícil continuarla a la vista de la progresión que siguen los resultados:

$$\begin{array}{ccccc} 3 & \cdot & -1 & = & -3 \\ 3 & \cdot & -2 & = & -6 \\ 3 & \cdot & -3 & = & -9 \end{array}$$

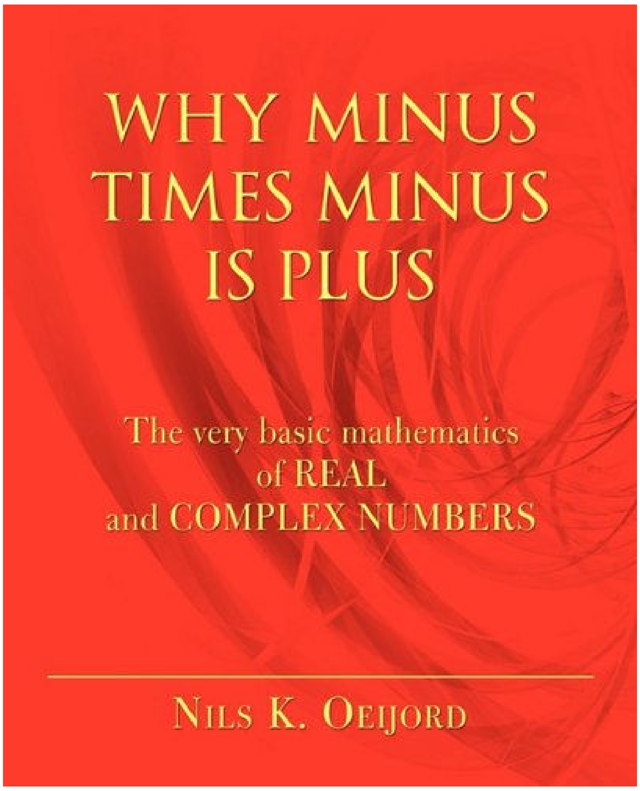
Bien, ya habíamos aceptado que más por menos es menos. Y ¿cuánto es menos por menos? Sigamos con la estrategia:

$$\begin{array}{ccccc} -3 & \cdot & 3 & = & -9 \\ -3 & \cdot & 2 & = & -6 \\ -3 & \cdot & 1 & = & -3 \\ -3 & \cdot & 0 & = & 0 \end{array}$$

Y si seguimos la progresión de resultados:

$$\begin{array}{ccccc} -3 & \cdot & -1 & = & 3 \\ -3 & \cdot & -2 & = & 6 \\ -3 & \cdot & -3 & = & 9 \\ -3 & \cdot & -4 & = & 12 \end{array}$$

Se deduce, por tanto, que menos por menos es más. El lector habrá entendido ya que el ejemplo dado con números es independiente de ellos y generalizable a cualquier otro par. Pero, ¿qué significa esto? Este artículo se titula "por qué", aceptamos la regla, aceptamos que sea así, pero, ¿qué significa?



Intentaremos aclararlo hablando de dinero:
En mi cartilla de la caja de ahorros recibo cada mes un apunte según el cual me descuentan por mi hipoteca 600€. La cosa podría ser algo así:

Fecha	Concepto	Apunte	Total
05.01.11	Recibo luz	-62€	1.203€
10.01.11	Hipoteca	-600€	603 €

El día cinco de enero la compañía de luz me cobró 62 euros y en la cartilla me quedaron 1.203€. El día 10 llegó el recibo de la hipoteca y me descontaron 600€, quedándome 603€.

El 15 de enero tuve suerte, gané 10.000€ en la lotería, ingresé todo el dinero en el banco y pedí al banco que al mes siguiente me cobrara 6 recibos de hipoteca juntos.

Fecha	Concepto	Apunte	Total
05.01.11	Recibo luz	-62€	1.203€
10.01.11	Hipoteca	-600€	603 €
15.01.11	Lotería	+10.000€	10.603 €
10.02.11	Hipoteca	6 x -600 €	7.003 €

Pero unos días después decido devolver dos de esos seis recibos, por tanto el apunte será:

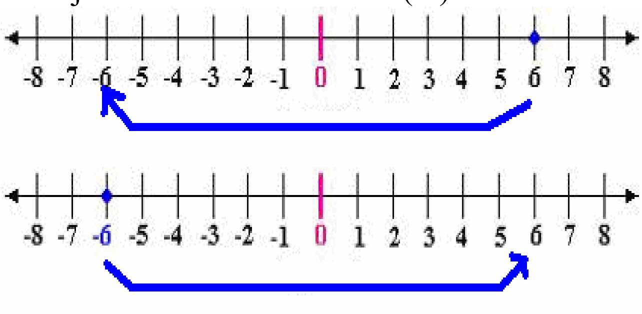
13.02.11	Hipoteca	-2 x -600 €	8.203 €

Es decir, si con 6 x -600 € mi cuenta disminuye en 3.600€, con el apunte -2 x -600 €, aumenta en 1.200€.

Otro ejemplo, ahora de agua: el pantano del río Pena, cerca de Valderrobres, baja su nivel 3cm. al día. En 7 días el nivel habrá bajado 21 cm. Si la altura hoy es de x cm., dentro de una semana será de x+ 7 ·(-3) =x-21 cm. ¿Y cuál fue su nivel hace siete días? x + (-7)·(-3) = x + 21 cm. Veintiún centímetros más. (-7)·(-3) = + 21.

Pantano de Pena, en el río Pena. Beceite.

Existe otra "demostración" geométrica muy intuitiva: considere un número positivo, por ejemplo el 6. Su opuesto, el -6, se obtiene "reflejándolo" en el cero, como si fuera un espejo. El opuesto de -6 es –(-6), que "reflejándolo" da 6. Por tanto –(-6)=+6.



Y ya, con un lenguaje matemático: sean a y b dos números reales, considérese el número:

$$x = ab + (-a)(b) + (-a)(-b)$$

Entonces, sacando factor común $-a$ de los sumandos segundo y tercero

$$\begin{aligned} x &= ab + (-a)[\,(b) + (-b)\,] \\ &= ab + (-a)(0) \\ &= ab + 0 \\ &= ab. \end{aligned}$$

Si sacamos factor común b del primero y segundo sumandos de x,

$$\begin{aligned} x &= [\,a + (-a)\,]b + (-a)(-b) \\ &= 0 \cdot b + (-a)(-b) \\ &= 0 + (-a)(-b) \\ &= (-a)(-b). \end{aligned}$$

Por tanto, $x = ab$ y también $x = (-a)(-b)$, así pues: $ab = (-a)(-b)$.

Lo mismo, de otra manera: partimos de la propiedad distributiva

$$a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$$

Sean $a=-1$, $b=1$ y $c=-1$, entonces:

$$(-1)\cdot [1+(-1)] = (-1)\cdot 1 + (-1)\cdot(-1)$$

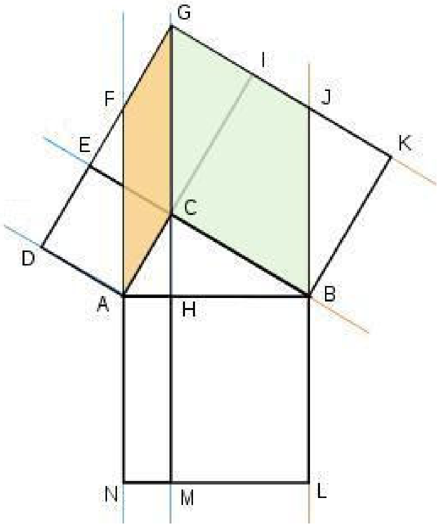
Es decir:

$$\begin{aligned} (-1)\cdot 0 &= -1 + (-1)\cdot(-1) \\ 0 &= -1 + (-1)\cdot(-1) \end{aligned}$$

Por tanto: $1 = (-1)\cdot(-1)$

¿Dónde nace esta duda de cuánto es menos por menos? Pues de nuestra intuición. Entendemos que cinco por dos es, por ejemplo, cinco veces el dos. Cinco por menos dos es cinco veces -2. Pero nuestra intuición se para cuando queremos extender este razonamiento. Menos cinco por menos dos ¿será "menos cinco veces" el menos dos? Pues, en cierto modo, sí. Pero como se ha visto en el ejemplo del dinero de la hipoteca y en el del nivel del pantano, la multiplicación es algo más que contar el número de veces que ocurre algo, si fuera así tampoco tendría sentido 2'4 por 5'3, ¿no le parece?

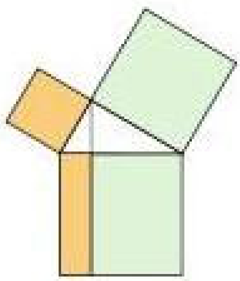
EL TEOREMA DE PAPPUS (UNO DE ELLOS)



Partimos de la siguiente demostración del Teorema de Pitágoras. Tenemos un triángulo rectángulo ΔABC, sobre los catetos AC y CB construimos sendos cuadrados: ACED y BCIK. Prolongamos los segmentos DE e IK hasta cortarse en G.

Consideramos ahora el triángulo ΔGCE, por construcción EC y AC son iguales entre sí y también lo son CB y EG, por tanto ΔABC es igual a ΔGCE y GC es igual a AB.

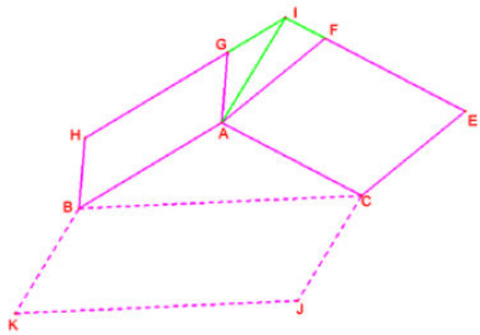
Ahora, el área del cuadrado ACED es igual a la del paralelogramo ACGF, por tener la misma base y la misma altura y esta área coincide con la de AHMN. Por el mismo motivo coinciden las áreas del cuadrado BCIK con la de BCGJ y la de BHML.



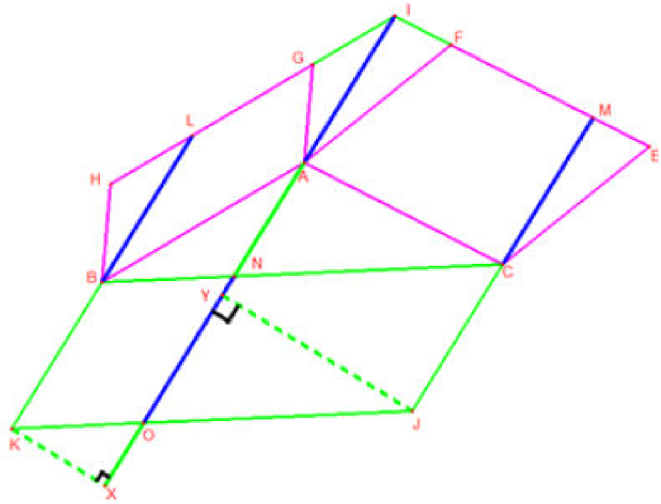
Por tanto, como se ve en la figura, donde aparecen coloreadas las áreas iguales:

$$AB^2=AC^2 + AB^2.$$

El Teorema de Pappus es una generalización del anterior. Se parte de un triángulo cualquiera ΔABC, se trazan paralelogramos en dos de sus lados, en nuestro caso ABHG y ACEF. Se prolongan los lados HG y EF hasta cortarse en I. Se considera el segmento AI y con él se construye el paralelogramo BCJK de modo que los lados KB y JC sean paralelos a AI y de igual longitud que este.

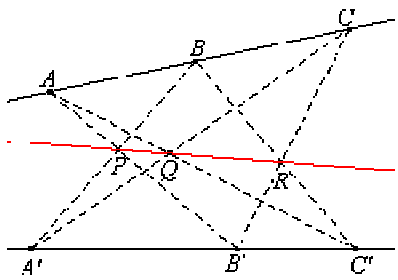


Lo que el Teorema de Pappus asegura es que el área de BCJK es igual a la suma de las áreas de ABHG y ACEF. El razonamiento es como el del teorema de Pitágoras de arriba.



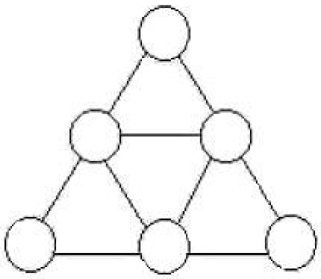
Los paralelogramos ABHG y ABLI tienen igual base y altura, luego igual área. ABLI y BNOK también, por el mismo motivo: igual base BK = AI por construcción e igual altura KX. Ocurre lo mismo con ACEF, ACMI y CNOJ. Con lo que queda demostrado el teorema.

Existen muchos otros teoremas debidos a Pappus que llevan este mismo nombre. Aquí va uno de gran sencillez y belleza: Si los puntos A, B y C están en una recta, los puntos A', B' y C' en otra, entonces la intersección de AB' con BA', la de AC' con CA' y la de BC' con CB', son tres puntos alineados.

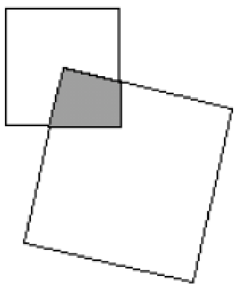


Tres problemas fáciles

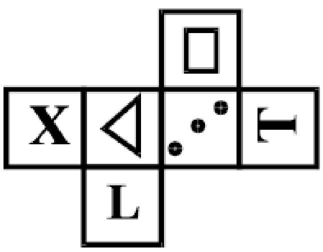
1. Coloca en los círculos los números del 1 al 6, luego suma para cada segmento las cifras de sus extremos. ¿Cómo colocarías los números para que la suma de todos los segmentos sea lo mayor posible?

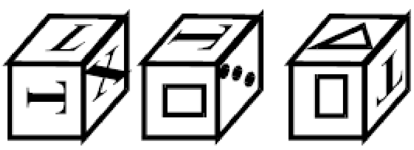


2. Los cuadros de la figura tienen de lados 4 y 6 cm. El vértice del mayor está en el centro del menor. ¿Cuál es el área de la zona sombreada?



3. Con este dado que aparece desplegado, ¿cuáles de los de abajo pueden construirse?





a b c

Tres problemas menos fáciles (y uno de propina)

1. Llegamos a nuestro Materraña número 27, así que nos gustaría saber de cuántas maneras se puede conseguir el 27 utilizando solo sumandos naturales impares.

2. Cuatro matrimonios quedan para cenar. Antonio y Ángela es un de ellos. Benito y Berta otro, Carlos y Carmen otro y Daniel y Diana el cuarto. En el restaurante se sentaron en una mesa redonda. Como indica el protocolo cada mujer estaba entre dos hombres y cada hombre entre dos mujeres. Además ningún matrimonio estaba junto.

Frente a Benito estaba Daniel y a la derecha de Berta estaba Carlos. ¿Cómo estaban sentados?

Mientras esperaban el postre jugaron como sigue: cada uno pensó un número entero y se lo dijo en secreto a sus vecinos de la derecha y de la izquierda. A continuación cada persona dijo en voz alta la media aritmética de los dos números que ha escuchado, empezando por Ángela y en el sentido de las agujas del reloj. Casualmente esos números han sido 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8. ¿Qué número pensó cada uno?

3. Imagina un tablero de ajedrez formado por *n* filas y *m* columnas, ¿cuántas casillas son atravesadas por la diagonal?

+1 Los números 32 y 46 tienen una curiosa propiedad: 32·46 = 1.472 = 23·64. ¿Cuántas parejas de números de dos cifras puedes encontrar con esta propiedad?

Recuerda nuestras direcciones:
materranya@yahoo.es
http://www.catedu.es/materranya
http://materranya.iespana.es