Matarraña

BOLETÍN DE MATEMÁTICAS DEL I.E.S. MATARRAÑA – Número 29 - MAYO 2.011

EL NÚMERO 29

El 29 es un número curioso, por los días de febrero, por el período de la Luna, y por algunas cosas más que se recogen a continuación.

Para empezar, algo bonito:

$$29 = 2 \cdot 9 + 2 + 9$$

Además, es suma de los cuadrados de tres números consecutivos:

$$29 = 2^2 + 3^2 + 4^2$$

es suma de primos consecutivos:

$$29 = 3 + 5 + 7 + 11 + 13$$

forma parte de una terna pitagórica:

$$29^2 = 20^2 + 21^2$$

y por si el lector quiere entretenerse en comprobarlo:

$$29 = \sqrt{\frac{6!+6}{6} + 6!}$$

Es un *Número de Perrin*. Estos números están definidos por la siguiente recurrencia:

$P_0=3$; $P_1=0$; $P_2=2$

$P_n = P_{n-2} + P_{n-3}$ para $n>2$.

También es el séptimo *Número de Lucas* y el quinto de *Pell*.

Tras el 1 y el 5 es el tercer número para el que $2n^2-1$ es un cuadrado.

Además es el mayor exponente al que se puede elevar 2 de modo que el resultado tenga todas sus cifras diferentes. El lector puede comprobar fácilmente estas dos últimas curiosidades.

TWENTY NINE es el único número que, en inglés, se escribe con tantos trazos (rectos) como su valor numérico.

¿Por qué un febrero bisiesto tiene 29 días? Con su nombre actual, antiguamente, el calendario comenzaba en marzo, y después abril, mayo ... hasta enero y febrero que eran los últimos meses del año. El número de días se alternaba entre 31 y 30, quedando 29 para febrero, o 30 los bisiestos.

M	A	M	J	J	A	S	O	N	D	E	F
31	30	31	30	31	30	31	30	31	30	31	29/30

Cuando Julio y Agosto se dedicaron a los emperadores Julio César y Augusto, se decidió que debían tener el mismo número de días, por eso se le pasó un día ”del final”, de Febrero que se quedó con 28, 29 los bisiestos. Después se reordenaron los días como los conocemos hoy (Agosto:31, Sept:30, Oct:31, Nov:30 y Dic:31)

¿Y cuál es la probabilidad de nacer un 29 de febrero?

Si uno de cada cuatro años es bisiesto, la probabilidad es

$$\frac{1}{365+365+365+366} = \frac{1}{1461}$$

Pero esto no es así, porque los años múltiplos de 100 no son bisiestos (1800, 1900, 2100,...) pero los múltiplos de 400 –pese a serlo de 100- sí lo son (el 2000 lo fue y 2400 lo será). Por ello la probabilidad anterior, aunque aproximada, no es exacta. Para calcularla hemos de considerar un período de 400 años, donde hay 100 – 4 + 1 bisiestos, es decir 97. Y 303 que no lo son. Por tanto:

$$\frac{97}{365 \cdot 303 + 366 \cdot 97} = \frac{97}{146.097} \approx 0'000664$$

¿Qué significa “bisiesto”?

En latín, “calendas” era el primer día del mes. Así el 23 de febrero era el *ante diem sextum kalendas martias,* es decir: sexto día antes del primero de marzo. Los romanos no “ponían” un 29 de febrero los años bisiestos, sino que introducían un día entre el 23 y el 24, al que llamaban segundo *sextum*, es decir, *ante diem bis sextum kalendas martias,* de *bis sextum* viene bisiesto, un segundo día 23.

Además, la velocidad media de la Tierra en torno al Sol es de 29’783 km/s. y 29’53 días es el tiempo que tarda la luna en dar una vuelta alrededor de la Tierra. Veintinueve también es el número de huesos del cráneo humano.

NÚMEROS DE FIBONACCI, DE LUCAS, DE PELL Y...

Tradicionalmente la palabra Fibonacci viene enseguida asociada a la cría de conejos, pero hay mucho más. Parte de ello se presenta a continuación. Es un tanto irónico que Leonardo de Pisa, conocido como Fibonacci, con muy importantes aportaciones a la matemática, sea hoy recordado sobre todo a causa de un matemático francés del siglo pasado, Edouard Lucas, interesado por la teoría de números (y recopilador de una clásica obra de matemáticas recreativas, quien encadenó el nombre de Fibonacci a una sucesión numérica que forma parte de un problema trivial del Liber abaci, la más conocida de las obras de Leonardo.

Sean P y Q dos enteros no nulos y $D=P^2-4Q$. Comencemos considerando los casos en que $D\neq 0$. Si se considera la ecuación $x^2-Px+Q=0$, sus soluciones son $a=\dfrac{P+\sqrt{D}}{2}$ y $b=\dfrac{P-\sqrt{D}}{2}$.

Con $a\neq b$, $a+b=P$, $a\cdot b=Q$ y $(a-b)^2=D$

Ahora se definen las siguientes dos secuencias:

$$U_0=0,\ U_1=1,\quad U_n=P\cdot U_{n-1}-Q\cdot U_{n-2} \qquad n\geq 2$$

$$V_0=2,\ V_1=P,\quad V_n=P\cdot V_{n-1}-Q\cdot V_{n-2} \qquad n\geq 2$$

Estas se dicen Primera y Segunda Secuencias de Lucas de parámetros P y Q.

Hasta aquí la definición, un tanto extraña, pero veamos algunos casos particulares:

Si $P=1$ y $Q=-1$, la Primera Secuencia de Lucas es

U_n: 0,1,1,2,3,5,8,13,21…

y la Segunda

V_n: 2,1,3,4,7,11,18,29…

La primera no necesita presentación, es la sucesión de Fibonacci y la Segunda son los Números de Lucas.

Las anteriores son fórmulas recurrentes, es decir, para calcular uno de los números, se necesitan los valores anteriores. Pero hay una forma directa de calcular el n-ésimo número de Fibonacci

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

y otra para los de Lucas

$$L_n=\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

Otra fórmula mucho más sencilla para el n-ésimo número de Fibonacci consiste en dividir entre la raíz cuadrada de 5 la n-ésima potencia de la razón áurea.

Y para hallar el n-ésimo número de Lucas basta elevar la razón áurea a la n-ésima potencia y redondear al entero más cercano.

Dado un número cualquiera de la sucesión de Fibonacci, para calcular el término siguiente no es preciso conocer su índice. Sea A, el término dado, El siguiente viene dado por

$$\left[\frac{A+1+A\sqrt{5}}{2}\right]$$

donde los corchetes indican que es necesario tomar la parte entera de la expresión. Esta misma fórmula da el número de Lucas consecutivo a cualquiera de su serie, con tal de que sea mayor que 3.

Édouard Lucas (1842-1891)

Si $P=2$ y $Q=-1$, la Primera Secuencia de Lucas es

U_n: 0,1,2,5,12,29,…

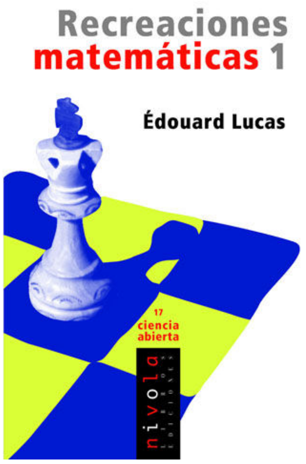
y la Segunda

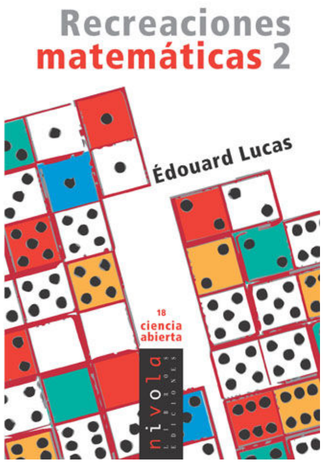
V_n: 2,2,6,14,34…

Los números de la primera se dicen *Números de Pell* y los de la Segunda se dicen *Compañeros de los Números de Pell.*

Ofrecemos ahora tres resultados, por si el amable lector deseara demostrarlos:

1. En las secuencias de Fibonacci y de Lucas los términos en posición $n=3\cdot k$ son pares –y sólo esos lo son- (recuerde que dichas series empiezan en $n=0$)
2. En la de Fibonacci, además, en posición $n=5\cdot k$ aparecen múltiplos de 5, y sólo ahí.
3. La sucesión de las últimas cifras de los números de Fibonacci tiene período 60. Si se toman las dos últimas cifras, la sucesión tiene período 300. Para la sucesión formada a partir de las tres últimas cifras el periodo es ya 1.500; para cuatro, el período tiene 15.000 cifras, para cinco, 150.000, y así sucesivamente.





El interés por estas sucesiones ha sido avivado por desarrollos recientes en programación de ordenadores, ya que al parecer tiene aplicación en clasificación de datos, recuperación de informaciones, generación de números aleatorios, e incluso en métodos rápidos de cálculo aproximado de valores máximos o mínimos de funciones complicadas, en casos donde no se conoce la derivada.

Otro campo de aplicación de las secuencias de Lucas es la búsqueda de números primos. Si $P=3$ y $Q=2$, entonces

$$U_n: 0,1,3,7,15,\dots$$

$$V_n: 2,3,5,9,17,\dots$$

Que son (si no se considera el primer término de cada una) 2^n-1 y 2^n+1.

Los primeros, U_n, se dicen *Números de Mersene* $M_q=2^q-1$ y los segundos están relacionados con los Números de Fermat

$$F_q = V_{2^q} = 2^{2^q}+1$$

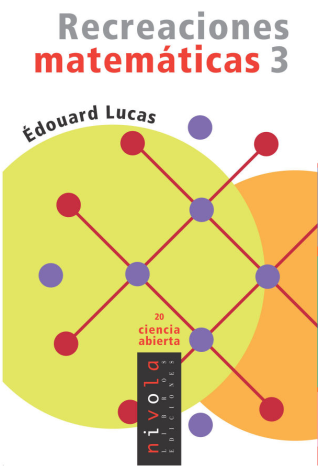
Ambas series se usan para buscar números primos. Los números de Fermat son: 3, 5, 17, 257, 6553 para q= 0, 1, 2, 3 y 4, estos cinco son primos, de modo que se pensó que esta era una forma de detectar primos, lamentablemente el siguiente, el quinto F_5 = 4.294.967.297 es 641 por 6700417, hecho descubierto por *Leonhard Euler*. Sobre si hay infinitos primos de Fermat, e incluso sobre si hay alguno más que los mencionados, de momento, los matemáticos no tienen respuesta.

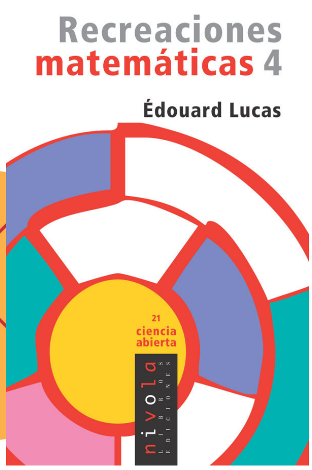
De momento F_6 F_7 y F_8 se ha factorizado.

En inglés se dice que un número es *repunit*, que puede traducirse como "repetición de la unidad" si todas sus cifras, en base 10, son 1. Pues bien, si *P=11* y *Q=10*, la Primera Secuencia de Lucas es

$$U_n: 0,1,11,111,1111\dots$$

Tal vez el lector encuentre interesante que $U_n = \frac{10^n-1}{10-1}$ y que, además, se anime a calcular V_n.





Un número *repunit* distinto de 1 no puede ser ni cuadrado ni potencia de cinco. En 1972 se demostró que tampoco es un cubo. La cuestión de qué *números repunit* son potencia de otros permanece abierta. Ni se ha encontrado un ejemplo de potencias diferentes de 2, 3 ó 5 ni se ha demostrado que no las haya. Si llamamos R_n al *repunit* con *n* veces el 1, entonces, R_2, R_{19}, R_{23}, R_{317}, R_{1031} son primos. Otra cuestión abierta es si hay infinitos *repunit* primos.

Comenzábamos el artículo con números *P* y *Q*, enteros no nulos, para los que $D=P^2-4Q \neq 0$. Bien, ¿qué ocurre si $D=0$? En estos casos se tienen las Secuencias de Lucas Degeneradas. Por ejemplo, si (P,Q)=(2,1)

U_n: 0,1,2,3,4,5,6, …

V_n: 2,2,2,2,2,2,2 …

si (P,Q)=(-2,1)

U_n: 0,1,-2,3,-4,5,-6, …

V_n: 2,-2,2,-2,2,-2,2 …

También se consideran degenerados los casos (P,Q)=(1,1)

U_n: 0,1,1,0,-1,-1,0,1,1,0, …

V_n: 2,1,-1,-2,-1,1,2,1,-1…

y si (P,Q)=(-1,1)

U_n: 0,1,-1,0,1,-1,0,1,-1,0, …

V_n: 2,-1,-1,2,-1,-1,2, …

¿Por qué es importante buscar números primos? Una aplicación de los números primos, sobre todo si tienen determinadas propiedades, es la encriptación de mensajes y datos. Para evitar robos de información cuando esta es transmitida por cualquier vía, esta ha de encriptarse, por ejemplo en datos bancarios o en telecomunicaciones. Para ello se emplean números primos fuertes. En realidad se usa el producto de dos de ellos.

Todos conocemos los primos gemelos: dos primos cuya diferencia es dos, por ejemplo 3 y 5 o 5 y 7. En la teoría de números un número *primo fuerte* es un número primo tal que es mayor que la media aritmética entre el primo siguiente y el anterior. 11, 17 y 29 lo son. 439.351.292.910.452.432.574.786.963.588.089.477.522.344.331, también.

Si un número primo es igual a la media de sus primos vecinos se dice primo equilibrado y si es menor primo débil. 5, 53 y 157 son los primeros tres primos equilibrados. Se conjetura que existen infinitos primos equilibrados.

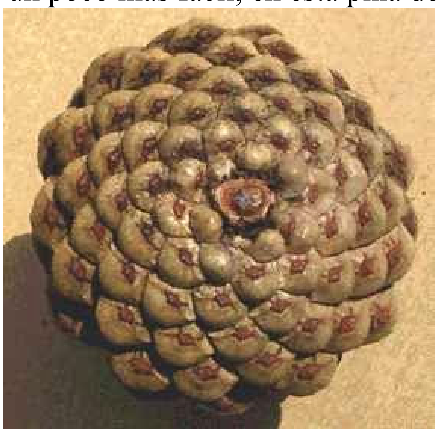
La sucesión de Fibonacci ha tenido intrigados a los matemáticos durante siglos, en parte por su tendencia a presentarse en los lugares más inopinados, pero también porque con conocimientos no mucho más allá de la aritmética elemental, se puede aspirar a investigarla y descubrir curiosos teoremas inéditos, de los que parece haber variedad inagotable. A continuación recogemos algunos resultados presentes en el *"Circo Matemático"* de Martin Gardner.

La razón entre cada número de Fibonacci y su anterior va oscilando por encima y debajo de la razón áurea, y según se avanza en la sucesión, la diferencia con ésta va haciéndose cada vez menor; las razones de términos consecutivos tienen por limite, en el infinito, la razón áurea.

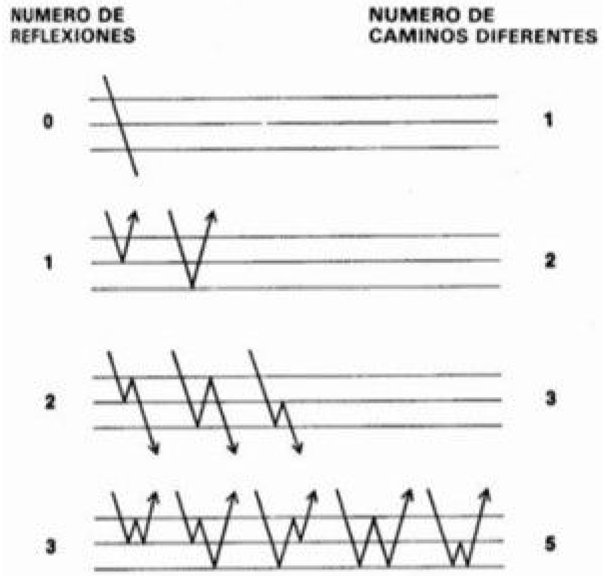
En el reino vegetal, la sucesión de Fibonacci hace su aparición más llamativa en la implantación espiral de las semillas en ciertas variedades de girasol. Hay en ellas dos haces de espirales logarítmicas, una de sentido horario, otra en sentido antihorario.

Los números de espirales son distintos en cada familia, y por lo común, números de Fibonacci consecutivos. Los girasoles de tamaño medio suelen contener 34 y 55 espirales, pero hay flores gigantescas que alcanzan valores de hasta 89 y 144. Un lector con paciencia podrá comprobarlo aquí:

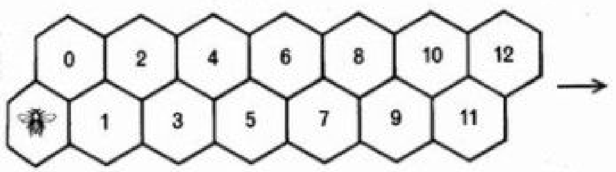
y si no, un poco más fácil, en esta piña de pino:



Las propiedades y aplicaciones de la sucesión de Fibonacci son muy numerosas y la lista aumenta constantemente, por ejemplo, *Leo Moser* ha estudiado las trayectorias de rayos luminosos que inciden oblicuamente sobre dos láminas de vidrio planas y en contacto. Los rayos que no experimentan reflexión alguna atraviesan ambas láminas de sólo una forma. Los rayos que sufren una reflexión tienen dos rutas posibles; cuando sufren dos reflexiones, las trayectorias son de tres tipos, y cuando sufren tres, de cinco. Al ir creciendo el número n de reflexiones, el número de trayectorias posibles va ajustándose a la sucesión de Fibonacci: para n reflexiones, el número de trayectorias es F_{n+2}.



La sucesión puede utilizarse de forma parecida para contar el número de distintas rutas que puede seguir una abeja que va recorriendo las celdillas hexagonales del panal.



Consideremos un panal con dos hileras de casillas que se prolonga indefinidamente hacia la derecha. Supondremos que la abeja se dirige siempre a una celdilla contigua y a la derecha de la que ocupa. Desde la posición de inicio hay sólo una ruta hasta la casilla 0, dos hasta la número 1, tres hasta la 2, cinco itinerarios que conduzcan a la 3, y así sucesivamente. Al igual que antes, el número de trayectos es F_{n+2}, donde n es el número de casillas del problema.

Y como las abejas machos, o zánganos, no tienen padre. *C. A. B. Smith* ha hecho notar que cada zángano tiene madre, 2 abuelos (el padre y la madre de la madre), 3 bisabuelos (y no cuatro, pues el padre de la madre no tuvo padre), 5 tatarabuelos, y así sucesivamente, en sucesión de Fibonacci.

David Klamer ha mostrado que los números de Fibonacci expresan de cuántas maneras podemos construir con dominós (rectángulos de tamaño *1 x 2*) rectángulos de dimensión *2 x k*. Hay sólo una manera de formar el rectángulo *2 x 1*; 2 maneras de construir el cuadrado de *2 x 2*; 3 para el rectángulo de *2 x 3*; 5 para el de *2 x 4*, y así sucesivamente.

Le mostramos ahora un truco: pida a alguien que escriba dos números, uno debajo de otro, que los sume y obtenga un tercero que coloque debajo. Pídale que sume el segundo con el tercero y lo coloque debajo, luego el tercero con el cuarto y lo coloque debajo. Así hasta formar una serie de 10 números. (Tendrá así una sucesión generalizada de Fibonacci que empieza con los números que su amigo pensó). Usted puede fingir que suma los diez números simplemente multiplicando por 11 el séptimo – lo que es fácil de hacer mentalmente-. No le costará mucho al lector demostrar que dicha suma es 11 veces F_7.

Vamos a acabar presentando los números de "Tribonacci", bautizados así por el matemático Mark Feinberg, cuando contaba 14 años. Empiezan igual: 1,1,2 pero ahora para calcular el siguiente se suman los tres anteriores: 1, 1, 2, 4, 7, 13, 24, 44, …

Los números de Tribonacci también se emplean para buscar primos, los primeros son: 2, 7, 13, 149, 19341322569415713958901,... que se obtienen para n= 3, 5, 6, 10, 86.

Se puede demostrar que los números de Tribonacci son completes, esto significa que cualquier entero positivo puede escribirse como suma de distintos números de Tribonacci. Y, desde luego, existen los números de Tetranacci. Y la constante de Tribonacci, si la razón entre cada número de Fibonacci y su anterior tiende a la razón áurea, la razón para números de Tribonacci tiende a *t= 1'83929…*, la constante de Tribonacci, que satisface, por ejemplo:

$$(t+1)\cdot(t-1)^2 = 2 \text{ y } t+t^{-3} = 2\,.$$

LUNAS Y CANDADOS.

¿Es casualidad que la Luna siempre nos muestre la misma cara? Los satélites de Marte y de Júpiter, por ejemplo, también muestran sólo una cara a sus planetas. Este comportamiento no es coincidencia: está gobernado por lo que los astrónomos llaman "candado o acoplamiento de mareas".

La atracción gravitatoria de la Luna sobre la Tierra hace subir el nivel del océano a ambos lados de nuestro planeta y crea así dos “levantamientos” aparentes en La Tierra (ya se explicó este fenómeno en el número 12 de Materraña). A medida que la Tierra gira de oeste a este, estos dos abultamientos (de los cuales uno mira siempre hacia la Luna y el otro en dirección contraria) se desplazan de este a oeste alrededor de la Tierra.

Con este desplazamiento se produce un rozamiento entre la masa de agua y el fondo de los mares poco profundos. Este rozamiento convierte energía de rotación en calor, y este consumo de la energía hace que la rotación de la Tierra alrededor de su eje vaya disminuyendo poco a poco. Por tanto, las mareas frenan la rotación de la Tierra, y como consecuencia, los días terrestres se van alargando. Lo hacen a razón de un segundo cada mil años.

La corteza sólida de la Tierra también acusa el efecto, aunque en menor medida. El resultado son dos pequeños abultamientos rocosos que van girando alrededor de la Tierra, el uno mirando hacia la Luna y el otro en la cara opuesta de nuestro planeta.
En resumen: la capa exterior de la Tierra (bien su parte líquida, bien su parte sólida) experimenta un movimiento “arriba-abajo” por influencia de la Luna que frena su rotación.

La Luna no tiene mares ni mareas. Sin embargo, la corteza sólida de la Luna sí acusa la fuerza gravitatoria de la Tierra, y no hay que olvidar que ésta (la de la Tierra sobre la Luna) es mucho mayor que la de la Luna sobre la Tierra.

¿Podría averiguar cuántas veces es mayor la fuerza con la que la Tierra atrae un kilo de materia lunar que aquella con que la luna atrae un kilo de masa terrestre?
Datos: Masa lunar: $7'349\times10^{22}$ Kg. Masa terrestre: $5'9736\times10^{24}$ Kg.

El abultamiento provocado en la superficie lunar es bastante mayor que el de la superficie terrestre. Por tanto, si dicha “marea rocosa” rotase como lo hace en la Tierra, la Luna estaría sometida a un rozamiento interno considerable. Además, como nuestro satélite tiene una masa mucho menor que la Tierra, su energía total de rotación sería ya de entrada, como primera aproximación, mucho menor (si le suponemos un período de rotación del mismo orden que el terrestre: 24 horas).

Así, pues, la Luna, con una reserva inicial de energía de rotación pequeña, consumida por las “mareas” en su superficie provocadas por la Tierra, tuvo que sufrir una disminución medianamente rápida de su período de rotación. Hace seguramente muchos millones de años debió de decelerarse hasta el punto de que el día lunar se igualó con el mes lunar. De ahí en adelante, la Luna siempre mostraría la misma cara hacia la Tierra.

Esto, a su vez, deja los abultamientos en una posición fija. Uno de ellos mira hacia la Tierra, mientras que el otro apunta en la dirección contraria. Como en esta situación no hay movimiento de las zonas abultadas, no hay consumo de energía de rotación y la Luna continuará mostrándonos la misma cara indefinidamente.

En algunos casos el rozamiento debido a las mareas da lugar a condiciones de estabilidad más complicadas. Durante años se pensó que Mercurio (el planeta más afectado por la gravedad solar) ofrecía siempre la misma cara al Sol, pero se ha comprobado que los efectos del rozamiento producen un período estable de rotación de 58 días, que es justamente dos tercios de los 88 días que constituyen el período de revolución de Mercurio alrededor del Sol.

Las libraciones.
Si bien se acepta que la Luna siempre ofrece la misma cara a la Tierra, esto no es del todo cierto. Pues presenta unos leves movimientos de balanceo que permiten ver en los bordes ciertas zonas distintas en diferentes días. Este movimiento de pequeñas oscilaciones se denomina *libración*, y hace que desde la Tierra se llegue a ver hasta el 59% del disco lunar,

observando discos lunares ligeramente distintos en diferentes fechas.
Se pueden distinguir tres tipos de libración:
La *libración en longitud*, la más importante, se produce por la diferente velocidad orbital de la Luna en días distintos. La órbita lunar alrededor de la Tierra es una elipse. Según la segunda Ley de Kepler la Luna se mueve en su órbita a mayor velocidad cuando está más cerca de la Tierra y a menor cuando se encuentra más lejos. El efecto que produce la libración en longitud es que la Luna parece que algunas veces adelanta su rotación y otras la retrasa con respecto a su posición orbital. Es por esto que la Luna oscila respecto a la Tierra en dirección Este-Oeste, con una amplitud máxima de 7°45'.
La *libración en latitud* se debe a que el ecuador lunar está inclinado con respecto al plano de la órbita lunar 6°40'. Esto permite observar un balanceo en dirección Norte-Sur de hasta 5°9' más allá de los polos lunares, de modo que a veces vemos una porción más del Sur lunar y, otras, una porción mayor del Norte, como muestra la figura siguiente.
La *libración diurna* es la más leve de las tres, y se produce cuando un observador terrestre mira la Luna a distintas horas del mismo día. Dado que el observador gira con la Tierra, obtiene perspectivas distintas de la Luna en el curso de unas horas, algo similar ocurre si dos personas observan la Luna en el mismo instante desde diferentes latitudes.
Otro fenómeno observable es *la luz cenicienta*. Casi la totalidad de la luz que baña la superficie lunar procede directamente del Sol.
Sin embargo la Tierra refleja parte de la luz que recibe del Sol, y parte de ella incide sobre la Luna, de manera similar, aunque en mayor medida, a como la Luna Llena ilumina suavemente la noche terrestre. El resultado es que en los días siguientes a la Luna Nueva puede apreciarse el pálido resplandor de la luz cenicienta cubriendo las regiones de la cara visible que aún no han sido iluminadas por el Sol, pudiéndose apreciar el borde del disco lunar en su totalidad.

Imagen de libración lunar

La Luna completa una rotación alrededor de su eje en 27.32 días, lo que se denomina mes sidéreo. En su traslación, completa una vuelta alrededor de la Tierra en el mismo intervalo de tiempo. 27 días, 7 horas y 43 minutos (periodo sidéreo). Y ya que este es nuestro número 29, decir que durante el mes sidéreo, la Tierra avanza en su órbita alrededor del Sol, y con ella la Luna. Por tanto, la luna "repite" posición respecto al Sol cada 29,53 días, el denominado mes sinódico, tras el cual las fases lunares se repiten nuevamente, exactamente cada 29d, 12h, 43m, 12s.

Vamos a proponer un sencillo pero interesante experimento: calcular el diámetro de la Luna utilizando una foto de un eclipse de Luna obtenida de internet en la que se aprecie claramente la sombra de la Tierra ocultando parte de la Luna, en ella calcularemos los diámetros aparentes de la Tierra y la Luna. Suponemos conocido el diámetro de la Tierra: 12.756 Km. La relación que nos permitirá realizar esto es la siguiente: $\frac{D_L}{D_T} = \frac{d_L}{d_T} \Rightarrow D_L = D_T \cdot \frac{d_L}{d_T}$.

Donde D_L es el diámetro de la Luna, D_T es el diámetro de la Tierra y d_L y d_T son los diámetros aparentes (en la foto) de la Luna y la Tierra. Para hallar el centro del arco que la sombra de la Tierra traza sobre la Luna se marcan tres puntos sobre él, el corte de las mediatrices de los segmentos formados representa el centro de la Tierra. Midiendo la distancia del centro de la Tierra (en el dibujo) hasta cualquiera de los puntos marcados, tendrá el radio aparente de la Tierra, y de ahí, d_T. Luego se ha de hacer lo mismo para determinar d_L, el diámetro aparente de la Luna.

Contraportada

Cinco problemas fáciles

1. Encuentre un número que sea igual a 11 veces la suma de sus cifras.

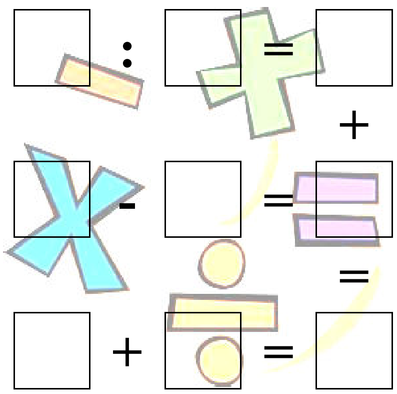
2. Hallar A y B sabiendo que este número es múltiplo de 99:

A254325B

3. ¿Qué número es mayor 100^{1000} ó 1000^{100}? ¿Y cuántas veces mayor es?

4. Alicia y Belén suman 25 años de edad, Belén y Carlos suman 22. Carlos y Diego, 26. Diego y Elena, 27. Elena y Fermín, 22. Alicia, Carlos y Fermín suman 33 años. ¿Qué edad tiene cada uno?

5. Coloque los números del 1 al 9 en estas casillas de modo que se cumplan las operaciones.



Cinco problemas menos fáciles

1. Sin calculadora, intente la siguiente operación:

$1^2-2^2+3^2-4^2+5^2- \ldots +2009^2-2010^2+2011^2$.

2. ¿Cuál es la cifra de las unidades de

$13^{2011}+11^{2011}-5^{2011}-3^{2011}$?

3. Las medidas de los lados de un triángulo rectángulo son números enteros. Dos de ellos son primos cuya diferencia es 50. ¿Cuál es el menor valor posible del tercer lado?

4. Among the first 2010 repunits, two have the same remainder when divided by 2009. Their difference, which is divisible by 2009, consists of a series of 1's followed by a series of 0's, meaning that the number is the product of a repunit and a power of 10. Since a power of 10 has no common factors with 2009, the repunit must be divisible by 2009. Try to find it.

Reference: I. F. Sharygin, *Mathematical Mosaic*, Mir, 2002, problem 65.1.

5. ¿Qué número falta en el siguiente conjunto?

164 – 364 – 649 –

Recuerde nuestras direcciones:
materranya@yahoo.es
http://www.catedu.es/materranya