Matarraña

BOLETÍN DE MATEMÁTICAS DEL I.E.S. MATARRAÑA – Número 32 - AGOSTO 2.011

EL PROBLEMA DE LOS TRES DIOSES

Allí delante puedes ver tres ángeles que custodian una puerta, uno de ellos contestará siempre la verdad a tus preguntas, otro te dará siempre respuestas falsas y otro, aleatoriamente, unas veces dice verdad y otras, falsedad. Mediante tres preguntas que sólo admitan por respuesta "sí" o "no" has de identificar a cada uno de ellos. Tus preguntas no necesariamente deben ir dirigidas una a cada uno. Si lo consigues, se abrirá para ti la puerta, si no, pasarás aquí la eternidad, como hacen muchos.

Este problema –que aquí aparece adaptado- fue propuesto por George Boolos en 1996 en *The Harvard Review of Philosophy*, como variante de otro de Raymond Smullyan.

La teoría de la información dice que las preguntas óptimas que se pueden hacer a los ángeles son aquellas en que las respuestas posibles tienen la misma probabilidad de aparecer, en nuestro caso ½.

Para empezar pondremos nombre a los ángeles: V al que siempre dice la verdad, M al que siempre miente y A al que responde al azar. Por tanto hay seis permutaciones posibles: VMA, VAM, MVA, MAV, AVM y AMV.

Obviamente tenemos delante los tres ángeles, pero no sabemos cuál es cuál, nosotros los identificaremos como I:izquierda, C:centro y D:derecha. Nuestra estrategia va a ser, primero, identificar a uno que no sea el aleatorio. Hemos de dirigir una pregunta óptima a uno de ellos, por ejemplo a I. Si le preguntáramos ¿Es el ángel de la Derecha aleatorio?, las respuestas serían

I-C-D	
VMA	→ SI
VAM	→ NO
MVA	→ NO
MAV	→ SI
AVM	→SI/NO
AMV	→SI/NO

Pero no permiten identificar al ángel no aleatorio. La primera pregunta, a I, es esta: "A la pregunta de si el ángel de la derecha es el Aleatorio, ¿responderías que sí?"

Estas son las posibles respuestas:

I-C-D	
VMA	→ SI
VAM	→ NO
MVA	→ SI
MAV	→ NO
AVM	→SI/NO
AMV	→SI/NO

Si responde que SÍ sabemos que C, el ángel del centro, no es Aleatorio, si responde que NO, el de la derecha no es Aleatorio. Justo lo que buscábamos. Observe, además, que esta es una pregunta óptima.

La segunda pregunta, ahora, es sencilla. Debe hacerse al ángel no Aleatorio: ¿Eres el ángel aleatorio? Si responde que sí, sabremos que es el que miente, si dice que no, es el de la verdad.
Ya tenemos identificado a uno. La tercera pregunta se la dirigimos otra vez a él. Es la siguiente: ¿Es el ángel de la izquierda el aleatorio? Según su respuesta, y si él es V ó M, tendremos identificados a todos.

Para acabar diremos que en el problema original los ángeles hablan un idioma desconocido para nosotros, la respuesta puede ser "Da" o "Ja", no sabemos cual es "sí" y cual "no". Ahora la primera pregunta sería al ángel I: A la pregunta "¿Es C es ángel Aleatorio?" ¿responderías "Ja"?
Si responde "Ja", D no es Aleatorio. Si responde "Da", C no es aleatorio. Y, pese a no saber la equivalencia de "Ja" y "Da" con "Sí" o "No", se puede identificar a los ángeles. Averiguar, además, el significado de "Ja" y "Da" necesitaría, obviamente, una cuarta pregunta ¿o no?

EL PROBLEMA DE LAS BOLAS DE COLORES

"Mira estas piedras, cinco de ellas son azules, ocho verdes y trece rojas. Te parecerán verdaderamente singulares, pues tienen una extraña propiedad, observa" y sin decir más, cogió con una mano una piedra azul y con la otra una roja. Las puso en contacto, y cuando se tocaron ambas cambiaron su color a verde. Añadió: "Si juntas dos de distinto color, ambas adquieren el tercer color, aquel del que no es ni una ni otra. Si juntas dos del mismo color, o más de dos no habrá cambio. Para superar esta prueba has de conseguir que todas las piedras sean del mismo color." No puede evitar reaccionar como un niño, tomé una verde y una azul, las uní y obtuve dos rojas. En ese momento tenía delante tres piedras azules, nueve verdes y catorce rojas. ¿Podrá hacerse lo que me pedían?

Este problema es de fácil solución partiendo de una idea previa, que se muestra a continuación. Sea X la variable "número de bolas azules menos número de bolas rojas":

$$X=A-R.$$

La siguiente tabla recoge cómo varía X según qué bolas se ponen en contacto

Bolas	ΔX
A-V	-3
A-R	0
V-R	+3

Por tanto, tras cada contacto, X, si varía, lo hace aumentando o disminuyendo de tres en tres. Para que todas las bolas fueran verdes, X tendría que poder llegar a valer cero, esto significa igual número de azules que de rojas, juntando una azul con una roja, se consiguen todas verdes.

En el enunciado, al principio, hay cinco azules, ocho verdes y trece rojas, entonces

$$X= 5 - 13 = -8.$$

Por tanto, variando de tres en tres, X nunca llegará a valer cero y no se puede llegar a todas verdes.

Para intentar llegar a todas azules se construye

$$Y=V-R.$$

Es decir, número de verdes menos número de rojas. Inicialmente $Y= 8 - 13 = -5$. Por tanto, tampoco es posible conseguir que todas sean e color azul.

Sí se podrían conseguir todas de color rojo, pues $Z=V-A$ tiene por valor inicial $Z= 8 - 5 = 3$ que, variando de tres e tres, es obvio, puede llegar a cero.

Pero de cinco azules, ocho verdes y trece rojas, el enunciado dice que tras varios cambios de color se parte de tres piedras azules, nueve verdes y catorce rojas.
Ahora $Z= 9 - 3 = 6$.

Para conseguir todas rojas se pone en contacto cada una de las tres azules con tres verdes, consiguiéndose seis rojas. Ahora se tiene:

$$A= 0,\ V= 6,\ R=20$$

A continuación dos verdes se ponen en contacto con dos rojas para conseguir cuatro azules, teniendo:

$$A= 4,\ V= 4,\ R=18$$

Y ya está, se unen cada una de las azules con cada una de las verdes para conseguir

$$A= 0,\ V= 0,\ R=26.$$

Llegados a este punto, seguro que el lector no tiene problemas para enunciar un ejemplo en el que sólo se pueda llegar a una situación de todas las bolas, salvo una, del mismo color y, también, todas salvo dos. Además puede indicar, de manera general, cómo ha de ser la distribución inicial para que cada una de estas situaciones ocurra.

EL PROBLEMA DE CRUZAR EL PUENTE

“Pelanius, mira este puente, en realidad es una nube. Según tú camines por él, el puente se irá haciendo más largo. Inicialmente mide cien tromes (el trome es la unidad de longitud que utilizamos aquí). Tu paso es de un trome. A cada paso que tú des para cruzarlo, el puente –recuerda que es una nube- se alargará cien tromes más, eso sí, de modo homogéneo en toda su longitud, es decir, se “estira” todo el puente, tanto por delante como por detrás de ti. ¿Crees que podrás cruzarlo?”

Como introducción necesaria, diremos que la resolución de este problema se basa en la serie armónica:

$$H_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

$H_n =$ *1*
+ 0’5
+ 0’333333…
+ 0’25+ 0’2
+ 0’166666…
+ 0’1428…+…

Por extraño que pueda parecer a quien no la conozca, esta suma supera cualquier valor, decimos en ese caso que diverge a infinito. La demostración es sencilla:

$$H_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

a partir del ½, agrupamos términos según las potencias de dos: primero uno, luego dos, luego cuatro, etc.

$$H_n = \frac{1}{1} + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots$$

ahora sustituimos cada fracción del paréntesis por la menor de ellas, con lo que queda

$$H_n \geq \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \cdots$$

y, operando cada paréntesis:

$$H_n \geq 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right) + \cdots = +\infty$$

Por tanto, H_n diverge a infinito, es decir, según sumamos nuevos términos a la serie, ésta supera cualquier cota que se le ponga.

Bien, vayamos ya con la resolución del problema. Esta se basa en la siguiente idea: Cuando Pelanius está en cualquier punto del puente y da un paso, el puente se “estira” 100 tromes uniformemente, no “crece” hacia adelante, sino que se comporta como si fuera una goma elástica. Esto significa que si Pelanius lleva recorrido un determinado porcentaje del puente, tras la dilatación de este, sigue llevando recorrido el mismo porcentaje.

Tal vez quede más claro con un ejemplo: el puente mide 100 tromes, cuando Pelanius avanza su primer paso (1 trome), le quedan 99. Ha recorrido un 1% del puente. Ahora el puente se “estira” cien tromes, pasando al doble, tanto por delante como por detrás de Pelanius, así pues tiene 2 tromes por detrás y 198 por delante: sigue llevando recorrido un 1%. Esta conservación del porcentaje es independiente del recorrido que lleve hecho.

Entendido esto la solución es fácil: El primer paso supone 1/100 del puente, como después el puente pasa a medir 200 tromes, el segundo paso supone 1/200 del puente. Éste pasa a medir 300 tromes, así pues el tercer paso es 1/300 del puente y así sucesivamente.

En porcentajes avanza un 1% el primer paso, un 1/2 % el segundo, un 1/3 % el tercero y así llegará un momento en que

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

supere 100. En ese paso Pelanius alcanza –y supera- el fin del puente habiéndolo cruzado.

A este ritmo le cuesta 12.367 pasos superar el 10% del puente.

Tal vez le apetezca al lector calcular, como hizo Pelanius durante su camino, cuántos pasos hubo de dar para cruzar y cuánto tiempo terrenal le hubiera costado si diera un paso por segundo. Afortunadamente para él en el Paraíso el tiempo no transcurre.

EL PROBLEMA DE LAS LLAVES

"Mira, Pelanius, sólo una de estas doce llaves abre esta puerta. La cerradura sólo admite un intento de ser abierta. Puedo decirte que la llave que necesitas tiene un peso ligeramente distinto a las demás, que pesan igual. Tus manos no conseguirán detectar esa pequeña diferencia, por eso puedes ayudarte de esta balanza. Pero ten cuidado, tras la tercera pesada que hagas, de desvanecerá en el aire. Piensa cómo hallar la llave correcta".

Pelanius separó primero las llaves en tres grupos con cuatro llaves en cada uno y pone en los platillos de la balanza dos de ellos. **Si la balanza se equilibra**, significa que la llave que busca está en el tercer montón. Ahora debe comparar tres de las cuatro del tercer montón con tres de las que pesan lo mismo. Si la balanza se equilibra, la llave buscada es la que queda sin pesar (la ha encontrado con dos pesadas). Si la balanza se desequilibra sabe que la llave que busca está entre las tres –del tercer montón- que acaba de poner y además sabe si ésta pesa más o menos que las demás. En una tercera pesada, de las tres compara dos y sabrá cuál es la llave.

Si en la primera pesada la balanza se desequilibra, tiene 8 candidatas a ser la llave y, por otro lado, cuatro iguales que descarta (las que están sin pesar). Llamaremos "pesadas" a las cuatro llaves que han desequilibrado la balanza a su favor y "ligeras" a las otras cuatro. Ahora ha de poner en cada platillo de la balanza dos llaves candidatas de las "pesadas" y una candidata de las "ligeras".

Si la balanza se equilibra, la llave buena –que, por tanto, sabemos que pesa menos- es una de las dos "ligeras" que no hemos pesado (en esta segunda pesada), comparando el peso entre ambas en una tercera pesada Pelanius sabrá qué llave necesita –la más ligera-. Si la balanza vuelve a desequilibrarse, -aquí viene la parte costosa del razonamiento- pueden ocurrir dos cosas respecto de la llave que buscamos:

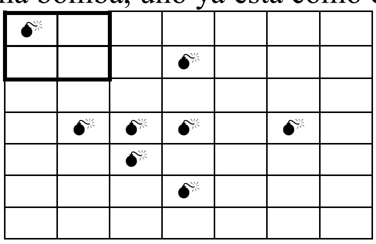
i) es la ligera del montón que subió
ii) es una de las pesadas del que bajó

en la tercera pesada comparamos las "pesadas" del motón que bajó. Si pesan distinto, la más pesada es la que busca Pelanium. Si pesan igual, la llave que necesita es la "ligera" del montón que subió.

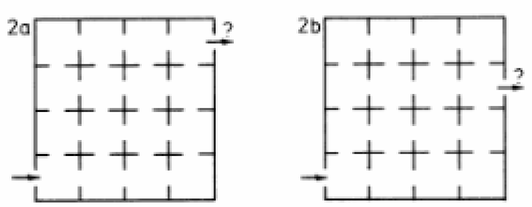
Contraportada

Tres problemas fáciles

1. En este cuadro 7x7 hay 8 bombas, se trata de aislar las bombas dentro de ocho cuadriláteros (rectángulos o cuadrados) de modo que en cada uno hay una bomba, uno ya está como ejemplo.



2. Intente cruzar estos laberintos pasando por todas las habitaciones, sólo una vez por cada una. Uno puede hacerse, el otro no.



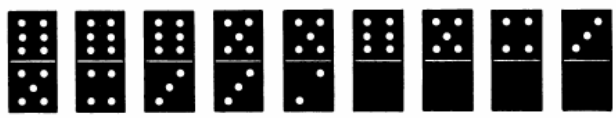
3. Coja cinco monedas iguales, ¿puede colocarlas de manera que se toquen todas con todas?

Tres problemas menos fáciles

1. La serie armónica se ha puesto a dieta, se ha desprendido de todos los términos en cuyo denominador aparezca alguna cifra "9". ¿Seguirá siendo divergente? ¿Qué ocurriría si se hubiese quedado sólo con los denominadores impares?

2. Fíjese en el problema fácil nº2, ¿puede dar un criterio que indique qué laberintos pueden cruzarse pasando por todas las estancias y cuáles no?

3. Can you form a magic square from these nine bones? (Replace each bone by its value)



Recuerde nuestras direcciones:
materranya@yahoo.es
http://www.catedu.es/materranya