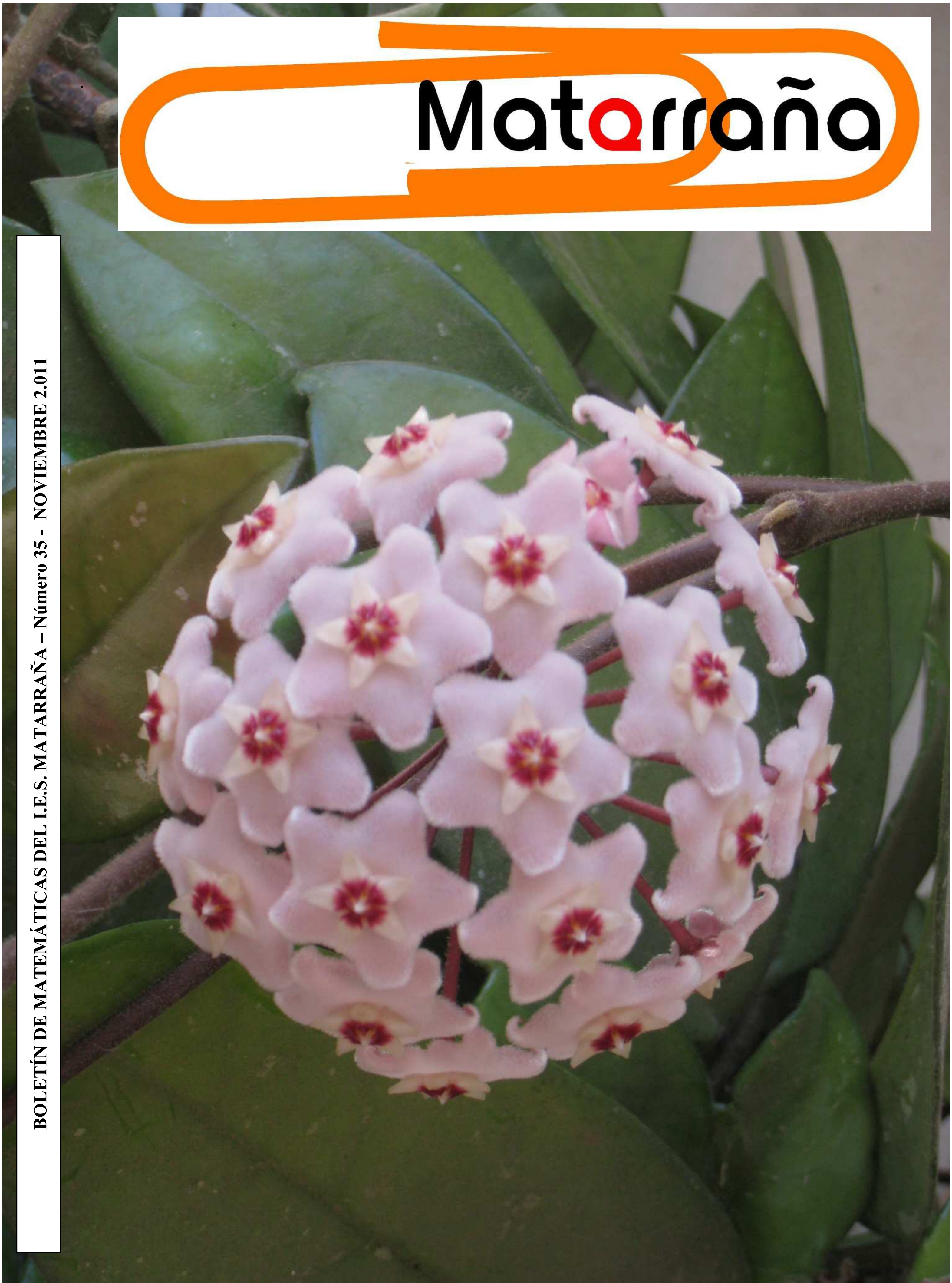
Matarraña



BOLETÍN DE MATEMÁTICAS DEL I.E.S. MATARRAÑA – Número 35 - NOVIEMBRE 2.011

UNA ESTRELLA DE CINCO PUNTAS

Habrá sorprendido a nuestros lectores nuestra portada. Siendo que con este número 35 del boletín cumplimos un nuevo múltiplo de cinco, dedicamos a esta cifra nuestra portada y este primer artículo.

En la antigüedad las construcciones geométricas se hacían con regla y compás. Entiéndase la regla como instrumento para trazar líneas rectas, no para medir; y el compás como el instrumento que traza circunferencias y arcos de estas.

Se hicieron famosos muchos problemas que buscaban obtener un determinado resultado geométrico. Dado un círculo construir una estrella de seis puntas inscrita en él, o, equivalentemente, un hexágono, es un problema sencillo. Aquí nos proponemos inscribir una estrella de cinco puntas, o un pentágono, en un círculo dado con la única ayuda de una regla y un compás.

El primer avance importante de la geometría se produjo en Grecia (500 a.C.), como aparece en “Los Elementos” de Euclides. Para los griegos la geometría es tanto teórica como práctica, pues se mostraron interesados en construir en forma sistemática cada figura que imaginaban. Contando para ello con varias herramientas, de las que destacan la regla y el compás.

Este interés y estos conocimientos pasaron a los matemáticos árabes, a los del medioevo y a los renacentistas, más como juego que por su utilidad.
También, apareció una cierta corriente de matemáticos que intentó poner más restricciones en la construcción, como por ejemplo, construcciones sólo con regla y compás rígido (o compás oxidado), en el que sólo se podía utilizar el compás con una apertura fija.
En el siglo XIX, el francés Poncelet demostró que toda construcción geométrica hecha con regla y compás puede hacerse con regla y compás rígido.

Hubo tres construcciones con regla y compás que se plantearon en la Antigua Grecia y que no se pudieron resolver.
El primero fue la trisección de un ángulo cualquiera. Es fácil realizar la bisectriz de un ángulo y dividir un segmento en tres partes iguales. Por tanto, parece que vaya a ser sencillo cómo dividir un ángulo en tres ángulos iguales.
Pese a que se encontró solución en algunos casos particulares no se llegó al caso general y a lo largo de la historia han aparecido falsas demostraciones.

El segundo problema fue la duplicación del cubo. Cuenta la historia que el pueblo de Delos estaba asolado por la peste y pidieron ayuda al Oráculo. La respuesta fue que construyesen un altar del doble de volumen del altar cúbico existente.
Crearon un altar cúbico con el doble de arista, pero la crisis siguió pues el nuevo altar tenía ocho veces mayor volumen.
Los constructores se hallaron incapaces de resolver este problema singular e interrogaron a Platón sobre el asunto, quien les recriminó que los dioses no habían pedido dicho altar porque lo necesitaran sino como reproche por su poco interés por las matemáticas en general y la geometría en particular.

Finalmente la cuadratura del círculo consiste en construir un cuadrado de área igual a la de un círculo dado, problema propuesto por Anaxágoras en el 500 a.C.

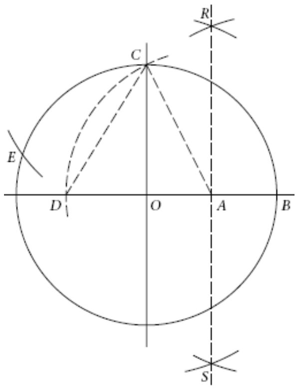
Estos tres problemas de enunciado tan sencillo, han interesado a los matemáticos durante más de dos mil años. Actualmente sabemos que es imposible resolverlos usando solamente regla y compás. (En 1837, el francés Wantzel demostró la imposibilidad de trisectar un ángulo arbitrario y la duplicación de un cubo).

A partir de estos problemas, y de otros similares, nació el álgebra, como un intento de abstracción de los problemas geométricos y la “demostración” de su posibilidad o imposibilidad. Puede decirse que la geometría requiere del álgebra para demostrar sus teoremas.

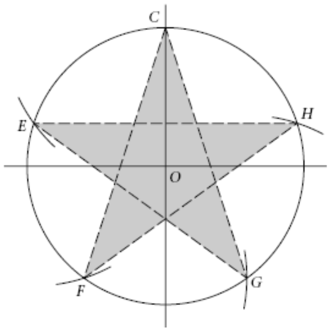
La imposibilidad de la construcción geométrica en los tres problemas mencionados se basa en la teoría de cuerpos y extensión de cuerpos.

Como ejemplo para este artículo nos proponemos inscribir una estrella de cinco puntas, o un pentágono, en un círculo dado con la única ayuda de una regla (instrumento para trazar rectas, no para medir) y un compás.

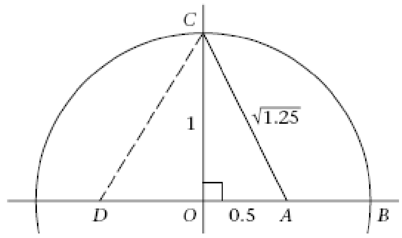
En primer lugar, dada la circunferencia de centro O, determinamos el punto medio del radio OB trazando su mediatriz, sea A ese punto.
Después, se traza el arco de centro A y radio AC hasta determinar D (obsérvese que no es el punto medio del otro radio).

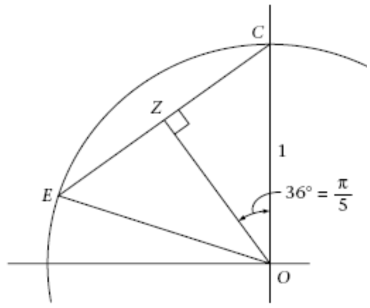


Ahora abra el compás un radio CD –este es el lado del pentágono-, y desde C marque el punto E sobre la circunferencia. Desde E, marque F, desde F marque G y desde G, H.



Aparentemente se trata de un pentágono regular, ¿realmente es así?
Consideremos que el radio de la circunferencia mide una unidad. Entonces OA mide 0'5 y, utilizando el teorema de Pitágoras, AC mide $\sqrt{1'25}$. Como AD mide lo mismo que AC, OD medirá $\sqrt{1'25}-0'5$. Y, nuevamente con el Teorema de Pitágoras, calculamos la longitud de CD, obteniendo 1'17557.





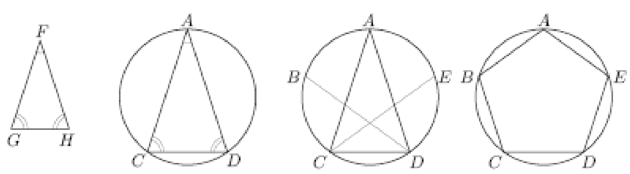
Por la construcción realizada esta es también la medida de CE. Para ver que CE es el lado del pentágono regular inscrito en la circunferencia de radio unidad, llamamos Z al punto medio del segmento CE. Trazando OZ tenemos en COZ un triángulo rectángulo, entonces el ángulo en O es

$$\alpha = arcsen\frac{CZ}{OC} = arcsen\, 0'587785$$

este ángulo es de 36º, por tanto el ángulo COE es de 72º y realmente hemos construido un pentágono, o una estrella de cinco puntas, con regla y compás.

Este problema ya lo incluye Euclides en sus elementos, recogemos a continuación su resolución y dejamos al lector su demostración. Es el teorema 11 de su Libro IV.

El primer paso es construir un triángulo isósceles FGH con el ángulo agudo mitad de los iguales. El teorema IV.10 dice cómo hacerlo. El segundo paso consiste en construir dentro del círculo dado un triángulo ABC con la misma característica. A partir del teorema IV.2 puede hacerse.



Después se bisecan los ángulos de los vértices C y D, se prolongan las bisectrices a la circunferencia y ya se tienen los vértices del pentágono.

LA FUNCIÓN ZETA

Presentamos a continuación la función Zeta de Euler, que dio pie en sus inicios a la resolución de un problema y que tres siglos después mantiene abierto otro para los matemáticos del presente.

Una serie infinita es una suma de infinitos términos. Por ejemplo: $1+2+3+4+5+...$ de esta serie se dice que diverge porque, evidentemente, su suma es infinito.

La serie $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+...$ también diverge. (Véase Materraña 32 para una demostración sencilla). En cambio

$$\frac{1}{2^0}+\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+...=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...$$

converge a 2, veámoslo: sus términos forman una progresión geométrica de razón ½. Por tanto, la suma de los infinitos términos es:

$$S_\infty=\frac{a_1}{1-r}=\frac{1}{1-1/2}=\frac{1}{1/2}=2.$$

Uno de los problemas históricos es el de Basilea que se pregunta por el resultado de la siguiente suma:

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+...$$

Euler fue el primero en calcularlo, veamos cómo lo hizo.

La función Zeta, o función Zeta de Euler o de Riemann, se define así:

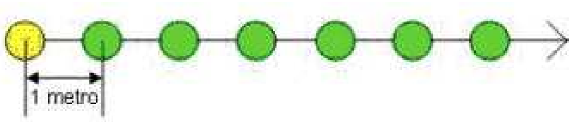
$$\zeta(s)=1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}+...=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$$

donde s es cualquier número real mayor que 1, luego veremos el porqué de esta restricción. ζ es la sexta letra del alfabeto griego, y su nombre es, precisamente, zeta.

Leonhard Euler fue el primero en estudiar en profundidad esta función, lo hizo en 1737. En su definición s era un número natural mayor que 1. Esta función tiene importantes propiedades e incluso está detrás de un famoso problema todavía no resuelto, la Hipótesis de Riemann.

Pensemos el siguiente problema:

Supongamos que se tienen infinitas partículas puntuales dispuestas en línea recta, cada una de 1 Kg. de masa, separadas un metro entre sí.



Queremos calcular la fuerza gravitatoria que experimenta la primera –la amarilla- debida a la presencia de las demás. Dicha fuerza, ¿será de magnitud finita o infinita?

Según la Ley de la Gravitación Universal de Newton, la fuerza de atracción mutua entre dos cuerpos de masas M_1 y M_2, medidas en kilogramos, separadas por una distancia de r metros es, en Newtons:

$$F_{1,2}=G\cdot\frac{M_1\cdot M_2}{r^2}$$

Donde G es una constante universal de valor $6'67\cdot10^{-11}\ Nw\cdot Kg^{-2}\cdot m^2$.

En nuestro caso, la primera partícula experimenta de la segunda una atracción gravitatoria igual a $F_{1,2}=G\cdot\frac{1\cdot1}{1^2}\ Nw.$; de la tercera $F_{1,3}=G\cdot\frac{1\cdot1}{2^2}\ Nw.$ y en general, de la que ocupa la posición n en la fila $F_{1,n}=G\cdot\frac{1\cdot1}{(n-1)^2}\ Nw.$

Sumando todas las fuerzas que experimenta la primera de las partículas, se obtiene:

$$F=\frac{G}{1^2}+\frac{G}{2^2}+\frac{G}{3^2}+\frac{G}{4^2}+...=G\cdot\zeta(2)$$

Pero, ¿cuánto es $\zeta(2)$?

Si se permitiera que s fuera menor o igual que cero, entonces, para cualquier número natural n

$$\frac{1}{n^s}\geq1$$

y $\zeta(s)$ sería la suma de infinitas cantidades mayores o iguales a 1, por tanto su valor sería infinito, es decir, la serie sería divergente.
Si *s* es positiva, *s>0,* se pueden agrupar los términos de la $\zeta(s)$ del siguiente modo:

$$\zeta(s)=1+\left(\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}\right)+\left(\frac{1}{4^s}+\frac{1}{5^s}+\frac{1}{6^s}+\frac{1}{7^s}\right)+\ldots$$

Primero nos quedamos con un solo término, el 1; luego con 2, luego con 4, luego con 8… Ahora se puede acotar cada paréntesis:

$$\left(\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}\right)\le\frac{1}{2^s}+\frac{1}{2^s}=\frac{2}{2^s}=\frac{1}{2^{s-1}}$$

$$\left(\frac{1}{4^s}+\frac{1}{5^s}+\frac{1}{6^s}+\frac{1}{7^s}\right)\le\frac{1}{4^s}+\frac{1}{4^s}+\frac{1}{4^s}+\frac{1}{4^s}=$$

$$=\frac{4}{4^s}=\frac{1}{4^{s-1}}$$

Con todo ello, se tiene:

$$\zeta(s)\le 1+\frac{1}{2^{s-1}}+\frac{1}{4^{s-1}}+\frac{1}{8^{s-1}}\ldots$$

Esta es una serie geométrica, es decir, es la suma de los infinitos términos de una progresión geométrica de razón $r=\frac{1}{2^{s-1}}$. Cuando esta razón sea menor que uno, se tendrá que

$$S'_\infty=\frac{a_1}{1-r}=\frac{1}{1-1/2^{s-1}}=\frac{1}{1-2/2^s}$$

y

$$\zeta(s)\le\frac{1}{1-2/2^s}$$

siempre que $r=\frac{1}{2^{s-1}}<1$, es decir, $1<2^{s-1}\Rightarrow 2<2^s\Rightarrow s>1$. Condición esta necesaria que ya se recoge en la definición de la función.

Del mismo modo:

$$\zeta(s)=1+\left(\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}\right)+\left(\frac{1}{4^s}+\frac{1}{5^s}+\frac{1}{6^s}+\frac{1}{7^s}\right)+\ldots$$

$$\ge\frac{1}{2^s}+\left(\frac{1}{4^s}+\frac{1}{4^s}\right)+\left(\frac{1}{8^s}+\frac{1}{8^s}+\frac{1}{8^s}+\frac{1}{8^s}\right)+\ldots$$

$$=\frac{1}{2^s}+\frac{2}{2^{2s}}+\frac{4}{2^{3s}}+\frac{8}{2^{4s}}+\ldots$$

que también es una progresión geométrica de razón $r=\frac{2}{2^s}=\frac{1}{2^{s-1}}$

Con todo ello, se tiene:

$$\zeta(s)\ge\frac{1}{2^s}+\frac{2}{2^{2s}}+\frac{4}{2^{3s}}+\frac{8}{2^{4s}}+\ldots=\frac{1/2^s}{1-1/2^{s-1}}=$$

$$\frac{2^{s-1}}{2^s\cdot\left(2^{s-1}-1\right)}=\frac{1}{2\cdot\left(2^{s-1}-1\right)}$$

Por tanto,

$$\frac{1}{2\cdot\left(2^{s-1}-1\right)}\le\zeta(s)\le\frac{1}{1-2/2^s}$$

En resumen, si $r=\frac{1}{2^{s-1}}<1$, o lo que es lo mismo *s>1*, entonces $\zeta(s)$ está acotada superior e inferiormente, por tanto, existe como número real.
Arriba nos preguntábamos por $\zeta(2)$, de momento podemos decir que

$$\frac{1}{2\cdot\left(2^{2-1}-1\right)}\le\zeta(2)\le\frac{1}{1-2/2^2}$$

$$\frac{1}{2}\le\zeta(2)\le 2\,.$$

Es decir, la fuerza a la que está sometida la primera partícula de la fila está entre *G/2* y *2G* Newtons. Para conocer la fuerza con exactitud se ha de recurrir a otra propiedad de la función Z.

El problema de Basilea.
Una vez sabido que $\zeta(2)$ era una cantidad finita, el problema de Basilea, llamado así por la ciudad suiza en cuya universidad los matemáticos y hermanos Jacob y Johann Bernoulli trabajaban, pedía su valor exacto.
Este problema se hizo famoso en Europa alrededor de 1650 cuando apareció publicado en el libro *Novae Cuadratura Arithmeticae* de Pietro Mengoli. El problema resistió los intentos de los matemáticos de la época por resolverlo, entre ellos estuvieron los hermanos Bernoulli, John Wallis y Gottfried Leibniz.
El problema fue resuelto por Euler en 1735, fue su primer logro matemático, lo que ayudó a iniciar su gran reputación.

Podemos entender la solución de Euler del problema de Basilea, adaptada a la nomenclatura moderna, es la siguiente:
Partamos de una ecuación de segundo grado

$$a\cdot x^2+b\cdot x+c=0$$

de soluciones r_1 y r_2. Puede ponerse en la forma $a\cdot\left(x-r_1\right)\cdot\left(x-r_2\right)=0$. Si ambas soluciones son diferentes de cero, desarrollando:

$$a\cdot\left[x^2-(r_1+r_2)x+r_1\cdot r_2\right]=0$$

o, lo que es lo mismo:

$$a\cdot x^2-a\cdot(r_1+r_2)x+a\cdot r_1\cdot r_2=0$$

Entonces, igualando coeficientes $b = -a \cdot (r_1 + r_2)$ y $c = a \cdot r_1 \cdot r_2$

y dividiendo b entre c se obtiene

$$\frac{b}{c} = -\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$$

es decir, el cociente entre el coeficiente lineal (el del término de primer grado) y el término independiente es el opuesto de la suma de los inversos de las soluciones.

En general, la ecuación polinómica de grado n y coeficientes reales

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

con término independiente no nulo $a_0 \neq 0$, si las raíces son $r_1, r_2, \cdots, r_n$ entonces

$$\frac{a_1}{a_0} = -\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \cdots + \frac{1}{r_n}\right). \quad (2)$$

Una serie de potencias es una serie de la forma $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot x^n$ con c_n coeficientes reales.

Una función f(x), infinitamente derivable en torno al 0, como la función seno, se puede expresar en forma de serie de potencias de la siguiente manera:

$$f(x) = f(0) + \frac{Df(0)}{1!} \cdot x + \\ + \frac{D^2 f(0)}{2!} \cdot x^2 + \frac{D^3 f(0)}{3!} \cdot x^3 + \cdots$$

que es la llamada serie de Maclaurin de la función.

Euler comenzó con la serie del seno:

$$sen\ x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Esta serie converge para todos los valores de x.

Considerando un $x \neq 0$, dividimos entre él:

$$\frac{sen\ x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots$$

Euler consideró la ecuación

$$\frac{sen\ x}{x} = 0; \quad x \neq 0$$

o lo que es lo mismo:

$$1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots = 0; \quad x \neq 0 \ (1)$$

que tiene de soluciones

$\pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \pm 4\pi, \cdots$ pero no $x=0$.

Como $\lim_{x \to 0} \frac{sen\ x}{x} = 1$, haciendo el cambio $u=x^2$ en (1) se obtiene

$$1 - \frac{u}{3!} + \frac{u^2}{5!} - \frac{u^3}{7!} + \cdots = 0$$

que tiene de soluciones $\pi^2, 4\pi^2, 9\pi^2, 16\pi^2, \cdots$

ahora, aplicando (2) a esta ecuación en u:

$$-\frac{1}{3!} = -\left(\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} + \frac{1}{16\pi^2} + \cdots\right)$$

por tanto

$$-\frac{\pi^2}{6} = -\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots\right)$$

Es decir,

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Este es uno de los resultados más valorados en matemáticas. Los métodos que Euler utilizó le permitieron calcular *ζ(s)* para valores pares de *s*. En 1740 demostró que, para cualquier entero positivo *n*, $\zeta(2n) = a_{2n} \cdot \pi^{2n}$ donde a_{2n} es racional.

Por ejemplo,

$$\zeta(4) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Sin embargo, esta demostración del problema de Basilea hoy no se consideraría muy rigurosa por la extensión al caso infinito de la suma de los inversos de las soluciones del polinomio, correcto para un grado finito. Euler dio una nueva demostración al año siguiente, en 1741.

El valor exacto de *ζ(s)* para valores impares de *s* sigue siendo un misterio hoy en día.

El lector tal vez conozca esta función con el nombre de Zeta de Riemann, es debido a que Riemann cogió el testigo en el estudio de esta función, pero eso queda para otro artículo. Simplemente diremos que estudió sui extensión a los complejos. La mencionada Hipótesis de Riemann hace referencia al estudio de sus ceros no triviales, la conjetura hace referencia a que la parte real de los ceros no triviales, es ½.

¿CUÁNTO MEDIRÉ DE MAYOR?

Ninguna fórmula puede decirnos cuál será la profesión de un muchacho o una muchacha o la cantidad de hijos que tendrá una persona, para eso debemos acudir a un tipo muy especial de profesionales. Pero existe una fórmula que estima la altura que tendrán de adultos.

Seguramente el lector ya conocerá el gráfico que aparece más adelante, en él se recogen los percentiles de la altura y el peso de los niños y las niñas durante la etapa de crecimiento.

Estos gráficos son estadísticos, en el sentido de que se obtienen a partir de datos, datos –y gráficos- que van cambiando con las generaciones. No existe una función que pueda darse mediante una fórmula, por compleja que fuera, cuya representación sea la recogida en estos gráficos.

Suponemos que lo dicho hasta aquí no sorprende a nadie. Lo que sí es llamativo es que, como decíamos en la introducción, existen unas fórmulas que dados la edad y la altura de un niño o niña, estiman su altura de adulto.

Si x y h son su edad y altura actual en años y centímetros, la altura estimada de adulto H es, para las chicas:

$$H = \frac{h}{0'00028 \cdot x^3 - 0'0071 \cdot x^2 + 0'0926 \cdot x + 0'3524}$$

y para los chicos

$$H^{'} = \frac{h}{0'00011 \cdot x^3 - 0'0032 \cdot x^2 + 0'0604 \cdot x + 0'3796}$$

Así, si Ana, de seis años, mide 122 cm., de adulta estimamos que medirá

$$H = \frac{122}{0'00028 \cdot 6^3 - 0'0071 \cdot 6^2 + 0'0926 \cdot 6 + 0'3524}$$

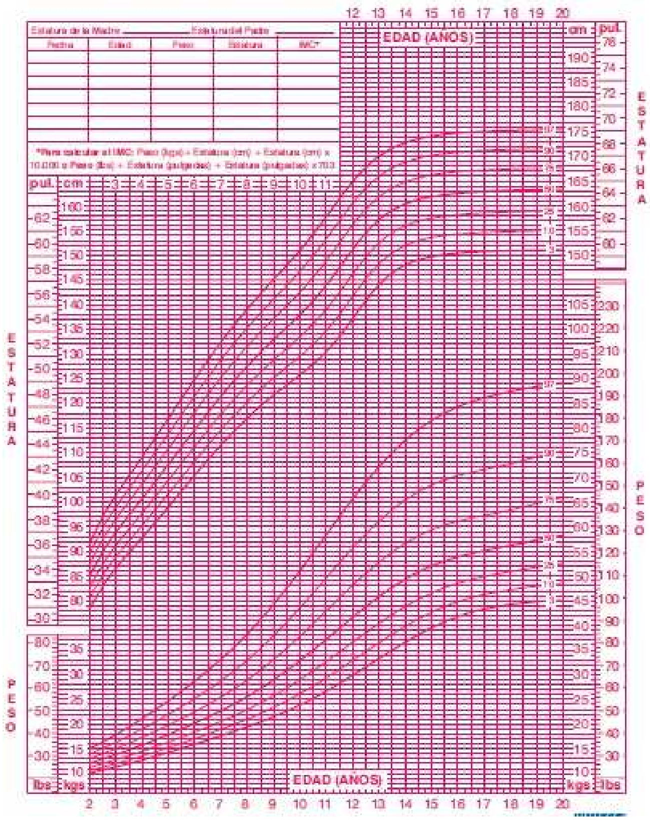
cuyo valor es: *H=171'13 cm.*

Por su parte, José, de tres años mide 95 cm., por tanto para estimar la altura que alcanzará de adulto hemos de calcular:

$$H^{'} = \frac{95}{0'00011 \cdot 3^3 - 0'0032 \cdot 3^2 + 0'0604 \cdot 3 + 0'3796}$$

cuyo valor es: *H'=177'58 cm.*

En los ejemplos anteriores hemos hecho el cálculo con años enteros, sería mejor haber tenido en cuenta años y meses, expresando la edad con decimales. Por ejemplo diciendo que la edad de José es de 3'43 años.



En este gráfico puede el lector comprobar lo acertado de la predicción para la niña y también buscar en internet otro gráfico para el desarrollo de los niños.

Proponemos a nuestros lectores que intenten, conocida la altura para una edad determinada, calcular la altura en cualquier momento futuro hasta la edad y altura del individuo adulto. Prometemos publicar en un número futuro la mejor de las respuestas.

Contraportada

Tres problemas fáciles

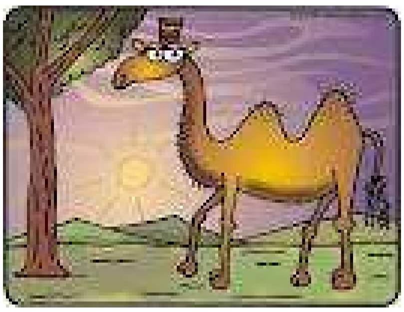
1. De todos es sabido que un número es divisible entre 11 si la suma de las cifras ubicadas en posición par y la suma de las ubicadas en posición impar difieren en cero o múltiplo de 11.
Nuestra propuesta es hallar un número múltiplo de 11 que contenga, una sola vez cada una, las cifras de 0 a 9.
¿Cuál es el mayor número posible?, ¿Y el menor?
No valen los números que empiecen por 0.

2. Considere un número de seis cifras, sumando dos a dos adyacentes, anote debajo sólo la cifra de las unidades. Repita el proceso hasta quedar un número de una sola cifra.
Veamos un ejemplo:

7 6 4 8 6 3
3 0 2 4 9
3 2 6 3
5 8 9
3 7
0

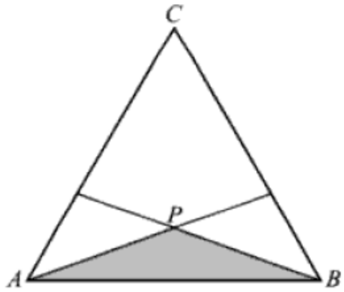
¿Sabría el lector predecir el resultado final sin realizar el proceso?

3. Un emir árabe, con motivo de su boda, repartió 1.000 camellos entre las familias de sus súbditos. Cada familia recibió un camello y, como sobraron, se entregó un segundo camello a una de cada tres familias, con lo que se acabaron los sacos. ¿Cuántas familias de súbditos tenía el emir?

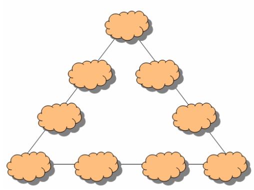


Tres problemas menos fáciles

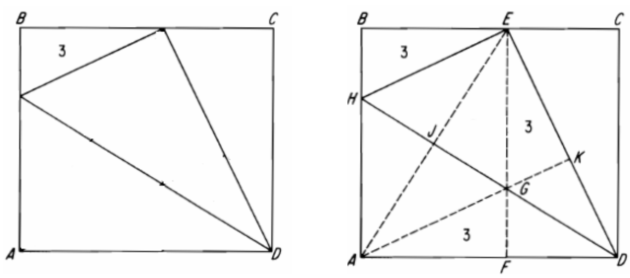
1. En un triángulo una ceviana es un segmento que une un vértice con un punto del lado opuesto, o su extensión. En el triángulo equilátero siguiente se han dibujado dos cevianas desde los vértices de la base hasta puntos que distan de A y B 1/3 de la longitud del lado.
¿Qué relación hay entre el área del triángulo inicial y el sombreado?



2. Coloque los números del 1 al 9 en cada hueco de modo que sumando los de cada lado se obtenga lo mismo resultado.



3. Una cartulina rectangular ABCD se dobla por uno de sus vértices, D, de modo que el adyacente A quede sobre el lado BC, formándose tres triángulos cuyas áreas están en progresión aritmética. Si el área del menor triángulo es de 3 u^2, ¿cuál es el área del mayor? Si admite una sugerencia, trace EF perpendicular a AD por E.



Recuerde nuestras direcciones:
materranya@yahoo.es
http://www.catedu.es/materranya