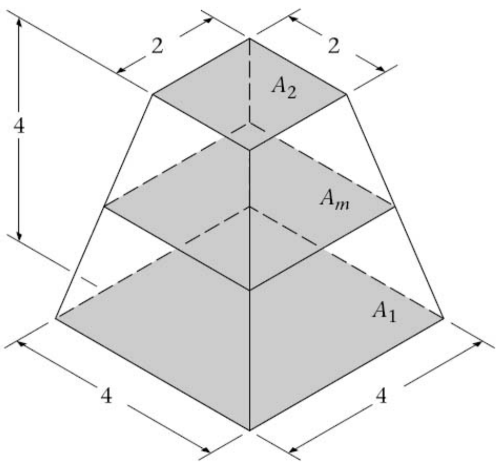
CÁLCULO DE VOLÚMENES

Empecemos con un ejercicio de secundaria: calcule el volumen de una pirámide truncada de bases dos cuadrados de lados 4 y 2 centímetros y altura 4 cm.



Tal vez recuerde alguna fórmula que acuda en su ayuda, o decida restar el de dos pirámides… Como se trata de una pirámide truncada, la fórmula que puede hallar en un libro de secundaria es:

$$V=\left(A_1+A_2+\sqrt{A_1\cdot A_2}\right)\cdot\frac{h}{3}$$

si ha llegado a 112/3 cm^3. la cosa ha ido bien. Ahora calcule el de una esfera de radio 10cm. y además el de un elipsoide de radios 5, 10 y 20 cm.

Ahora imagine un sólido con dos caras paralelas, que llamaremos bases, y el resto de lados polígonos de igual número de lados. Un sólido así se dice prismoide.

Pues bien, el volumen del prismoide tiene una fácil expresión analítica:

$$V=\left(\frac{A_1+4\cdot A_m+A_2}{6}\right)\cdot h$$

Donde A_1 y A_2 son las áreas de las bases y A_m es el área del poliedro que está a mitad altura del prismoide. Además, *h* es la altura del sólido.

En nuestro caso: $A_1 = 16\ cm^2$, $A_2 = 4\ cm^2$, $A_m=9\ cm^2$ y $h=4\ cm$. Por tanto:

$$V=\left(\frac{16+4\cdot 9+4}{6}\right)\cdot 4=\frac{56}{6}\cdot 4=\frac{112}{3}cm^3.$$

La fórmula anterior también puede aplicarse a algunos sólidos con “caras” curvas. Para una esfera, entendiendo que las bases son puntos: $A_1 = 0\ cm^2$, $A_2=0\ cm^2$, $A_m=\pi\cdot r^2\ cm^2$ y $h=2\cdot r\ cm$.

$$V=\left(\frac{0+4\cdot 100\pi+0}{6}\right)\cdot 20=\frac{400\pi}{6}\cdot 20=\frac{4000\pi}{3}cm^3.$$

Por otro lado:

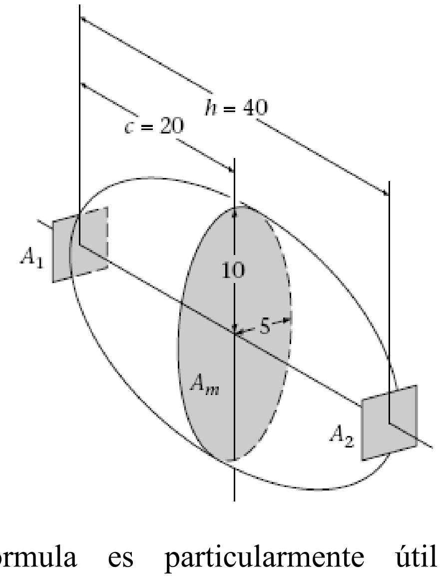
$$V=\frac{4}{3}\pi\cdot r^3=\frac{4\pi}{3}\cdot 1000cm^3.$$

Para el elipsoide de radios 5, 10 y 20 cm., $A_1=0\ cm^2$, $A_2=0\ cm^2$, $A_m=\pi\cdot 5\cdot 10\ cm^2$ y $h=40\ cm$.

$$V=\left(\frac{0+4\cdot 50\pi+0}{6}\right)\cdot 40=\frac{200\pi}{6}\cdot 40=\frac{4000\pi}{3}cm^3.$$

y

$$V=\frac{4}{3}\pi\cdot a\cdot b\cdot c=\frac{4\pi}{3}\cdot 1000cm^3.$$



Esta fórmula es particularmente útil para aproximar el volumen de sólidos irregulares.

EL CÁLCULO DE RAÍCES

Antes de la existencia de las calculadoras de bolsillo muchos cálculos matemáticos suponían un gran esfuerzo y una alta facilidad de cometer errores. El cálculo de raíces cuadradas, cúbicas o de otro índice son un ejemplo de ello. Existían muchos algoritmos de cálculo de raíces pero se seguía buscando la fórmula que lo facilitara. Las fórmulas que presentamos a continuación pueden parecer fuera de lugar en nuestros días, pero tienen belleza y valor histórico. Puede parecer contradictorio que nos apoyemos en la hoja de cálculo, pero puede aprovecharse por su enfoque didáctico. Estos algoritmos dan sólo aproximaciones al valor exacto, pero fueron una ayuda incuestionable.

El cálculo de la raíz cuadrada se hacía con un método iterativo. Para calcular $\sqrt{N}$ se elegía primero una aproximación x_0 y se calculaba $x_1 = \frac{1}{2}\cdot\left(x_0 + \frac{N}{x_0}\right)$ como aproximación de $\sqrt{N}$ mejor que x_0. Y se repetía el proceso:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\cdot\left(x_n + \frac{N}{x_n}\right).$$

Por ejemplo, para N=5, y x_0=2; se obtiene:

	A	B
2	N=	5
3	Raíz de N=	2,23606798
4		
5	Primer valor:	2
6	i=	xi=
7	0	2
8	1	2,25
9	2	2,23611111
10	3	2,23606798
11	4	2,23606798
12	5	2,23606798

Donde x_2 ya da tres decimales de $\sqrt{5}$ y x_3 ocho.

Otro ejemplo, para N=345, con dos valores iniciales x_0=2, que es una primera aproximación bastante mala, y x_0=15, que es mejor. En cada caso se obtiene:

	A	B	C
2	N=	345	
3	Raíz de N=	18,5741756	
4			
5	Primer valor:	2	15
6	i=	xi=	x'i=
7	0	2	15
8	1	87,25	19
9	2	45,6020774	18,5789474
10	3	26,5837611	18,5741762
11	4	19,7808043	18,5741756
12	5	18,6109778	18,5741756
13	6	18,574212	18,5741756
14	7	18,5741756	18,5741756
15	8	18,5741756	18,5741756
16	9	18,5741756	18,5741756

Como $\sqrt{345} \cong 18{,}5741756$, con valor inicial x_0=2, x_6 ya da tres decimales exactos y x_7 da ocho. Si x_0=15, x_4 da ocho. Algunos de nuestros lectores ya conocen porqué funciona este método.

Pasemos a las raíces cúbicas. El método para calcular $\sqrt[3]{N}$ se basa en la siguiente forma de aproximar una potencia cubo:

$$\left(a + \frac{b}{3a^2}\right)^3 \cong a^3 + b.$$

Haciendo $N = a^3 + b$, entonces

$$\left(a + \frac{b}{3a^2}\right) \cong \sqrt[3]{N}.$$

Veamos un ejemplo. Para aproximar la raíz cúbica de 151, partimos de que $\sqrt[3]{125} = 5$ es cercana a $\sqrt[3]{151}$. Así $N = a^3 + b$ queda $151 = 5^3 + 26$. Considerando *a=5* y *b=26*, se tiene: $\sqrt[3]{151} \cong 5 + \frac{26}{3\cdot 5^2}$.

$$5 + \frac{26}{3\cdot 5^2} = \frac{5\cdot 75 + 26}{75} = \frac{401}{75} = 5'34\widehat{6}$$

Cuando el valor verdadero es 5,3250740216…

Para aproximar una raíz n-ésima se usa la siguiente fórmula:

$$\sqrt[n]{N} \cong \frac{1}{a^{n-1}} \cdot \frac{a^n \cdot (n-1) + N}{n}$$

donde a es una primera aproximación. Probemos a calcular la anterior $\sqrt[3]{151}$ partiendo de *a=5*

$$\sqrt[3]{151} \cong \frac{1}{5^2} \cdot \frac{5^3 \cdot 2 + 151}{3} = \frac{401}{75}$$

el mismo que antes. Pero este proceso es iterativo, podemos considerar ahora $a = 5'34\widehat{6}$

$$\sqrt[3]{151} \cong \frac{1}{5'34\widehat{6}^2} \cdot \frac{5'34\widehat{6}^3 \cdot 2 + 151}{3} = 5{,}32516111$$

E iterando, la imagen siguiente recoge el proceso para dos valores iniciales, uno cercano a $\sqrt[3]{151}$, *a=5;* y otro más alejado, *a=2.*

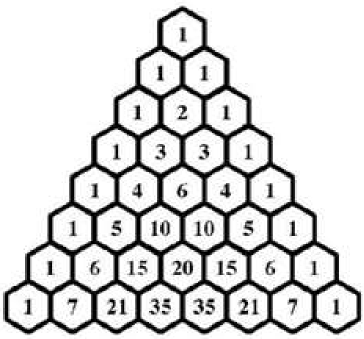
	A	B	C
1	N=	151	
2	n=	3	
3	Raíz n de N=	5,32507402	
4	Primer valor:	5	2
5			
6	i=	xi=	x'i=
7	0	5	2
8	1	5,34666667	13,9166667
9	2	5,32516111	9,53766519
10	3	5,32507402	6,91175732
11	4	5,32507402	5,66144541
12	5	5,32507402	5,34466352
13	6	5,32507402	5,32514573
14	7	5,32507402	5,32507402
15	8	5,32507402	5,32507402
16	9	5,32507402	5,32507402

Probando a calcular la anterior $\sqrt[4]{151}$ partiendo de *a=5* y *a=2.*

	A	B	C
1	N=	151	
2	n=	4	
3	Raíz n de N=	3,50545371	
4	Primer valor:	5	2
5			
6	i=	xi=	x'i=
7	0	5	2
8	1	4,052	6,21875
9	2	3,60642523	4,82102925
10	3	3,50961557	3,95266933
11	4	3,50546111	3,57578948
12	5	3,50545371	3,50750189
13	6	3,50545371	3,50545551
14	7	3,50545371	3,50545371
15	8	3,50545371	3,50545371

Siendo el valor real $\sqrt[4]{151} = 3{,}50545371...$

Los chinos conocían un método de calcular raíces de cualquier índice desde muy antiguo. Ch'in Chiu-Shao en su libro *"El precioso espejo de los cuatro elementos"* hacia el año 1303, recoge un método de hallar raíces aproximadas basado en el llamado Triángulo de Pascal.



Este triángulo muestra los coeficientes de las sucesivas potencias del binomio de Newton, y como el lector sabrá cada elemento se obtiene sumando los dos superiores, aparte de los extremos, que son unos.

Para hallar la raíz cuadrada de un número, aquí volvemos a la de 345 como ejemplo, se parte del cuadrado inferior: 324 = 18^2. A continuación se plantea:

$$(18+x)^2 = 345$$

Desarrollando: $324+36x+x^2=345 \rightarrow 36x+x^2=21 \rightarrow x\cdot(36+x)=21$ y, por fin:

$$x = \frac{21}{36+x}$$

Ahora se elige un x_0 y se inicia un proceso iterativo

$$x_{n+1} = \frac{21}{36+x_n}$$

Como partíamos de $(18+x)^2 = 345$,

$$\sqrt{345} \approx 18 + x$$

Entendiendo que x es el límite de las iteraciones anteriores. Este proceso, que en la actualidad llamamos Método de Horner, ya era conocido en occidente por Newton.

Calculemos ahora $\sqrt[3]{151}$ partiendo de 5^3=125, se escribe: $(5+x)^3 = 151$.

Desarrollando: $125+75x+15x^2+x^3=151$ y en proceso análogo al anterior: $75x+15x^2+x^3=26 \rightarrow x\cdot(75+15x+x^2)=26$ y de aquí:

$$x_{n+1} = \frac{26}{75+15x_n+x_n^2}$$

Como $(5+x)^3 = 151$, $\sqrt[3]{151} \approx 5 + x$

La imagen siguiente recoge los resultados obtenidos con la hoja de cálculo.

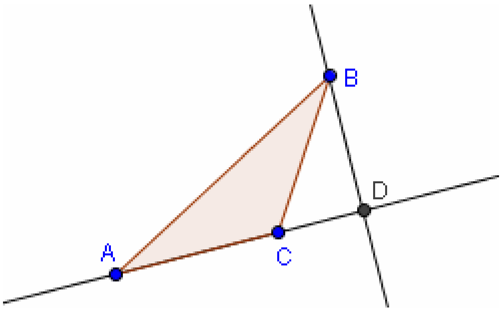
	A	B	C
1			
2		$\sqrt{345} - 18$	$\sqrt[3]{151} - 5$
3	0	10	8
4	1	0,456521739	0,1003861
5	2	0,576028623	0,339798794
6	3	0,574146532	0,324139227
7	4	0,574176078	0,325133489
8	5	0,574175614	0,325070239
9	6	0,574175621	0,325074262
10	7	0,574175621	0,325074006
11			

EXTENSIONES DEL TEOREMA DE PITÁGORAS

El teorema del coseno es una extensión del de Pitágoras para triángulos no rectángulos. El teorema II.12 de los Elementos de Euclides ya presenta dicha extensión a triángulos oblicuángulos, lo presentamos a continuación, junto con la demostración de Euclides, expresada aquí de un modo más actualizado. Posteriormente presentaremos el teorema de Tabhit ibn Qurra y la relación entre ambos.

Teorema II.12. Para un triángulo ABC obtusángulo en C, se traza la perpendicular al lado AC por B, determinando así el punto D en que corta a la prolongación de AC. Entonces, el cuadrado de la longitud del lado AB (el que está frente al ángulo obtuso) supera la suma de los cuadrados de las longitudes de los lados que forman el ángulo obtuso en dos veces el producto de las longitudes de los segmentos AC y CD.

Es decir: $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CB}^2 + 2 \cdot \overline{AC} \cdot \overline{CD}$



La demostración de Euclides se basa en tres teoremas anteriores de sus *"Elementos"*.

Por el teorema I.47, que nosotros comocemos como el teorema de Pitágoras, aplicado a los triángulos rectángulos ABD y CBD:

$\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DB}^2$ y $\overline{CB}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{CD}^2$

Por el teorema II.4, para nosotros es el cuadrado de una suma:

$\overline{AD}^2 = \left(\overline{AC} + \overline{CD}\right)^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CD}^2 + 2 \cdot \overline{AC} \cdot \overline{CD}$

Por tanto:

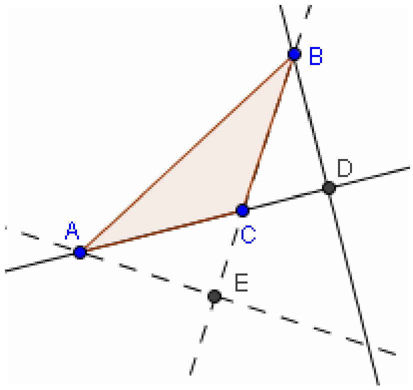
$$\begin{aligned} \overline{AB}^2 &= \overline{AD}^2 + \overline{DB}^2 \\ &= \overline{AC}^2 + \overline{CD}^2 + 2 \cdot \overline{AC} \cdot \overline{CD} + \left(\overline{CB}^2 - \overline{CD}^2\right) \\ &= \overline{AC}^2 + \overline{CB}^2 + 2 \cdot \overline{AC} \cdot \overline{CD} \end{aligned}$$

con lo que Euclides termina su demostración.

Razonando sobre el otro lado que forma el ángulo obtuso, se tiene que

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CB}^2 + 2 \cdot \overline{AC} \cdot \overline{CD}$$

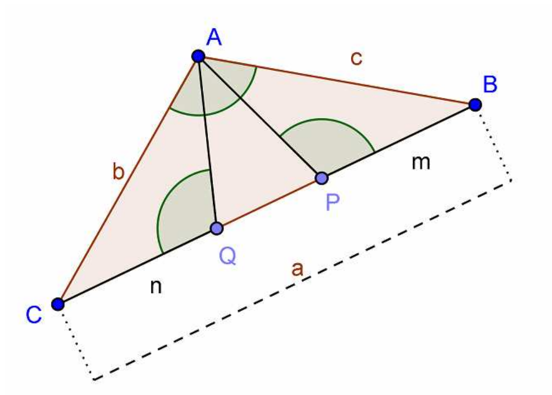
$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CB}^2 + 2 \cdot \overline{BC} \cdot \overline{CE}$$



El Teorema de Thabit ibm Qurra es una generalización del Teorema de Pitágoras para triángulos cualesquiera en una presentación diferente. Su enunciado dice que si en un triángulo ABC se determinan dos puntos en un lado P y Q tales que los ángulos

ang(APB)= ang(AQC)= ang(BAC)

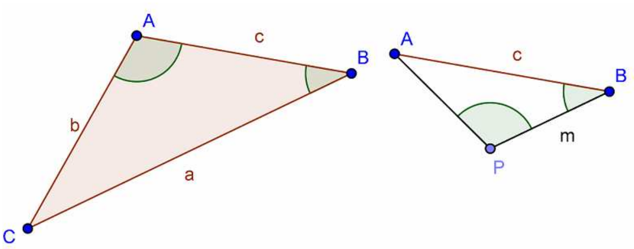
entonces: $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC} \cdot \left(\overline{BP} + \overline{CQ}\right)$



La demostración es sencilla. Para ello consideraremos las longitudes de los segmentos,

a la de BC, b la de AC, c la de AB, m la de BP y n la de QC.

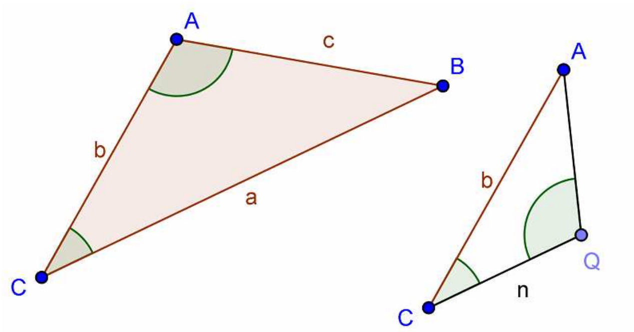
Los triangulos BAC y BPA son semejantes, por tener los tres ángulos iguales.



Por tanto:

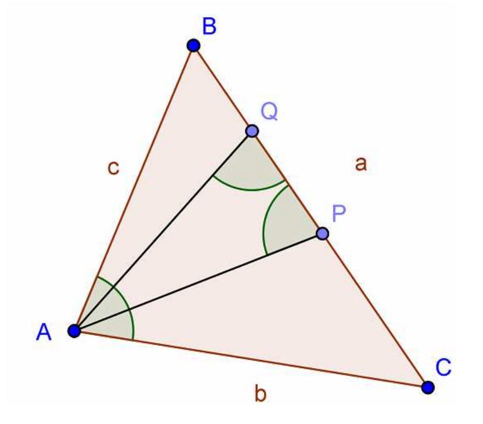
$$\frac{c}{m} = \frac{a}{c} \Rightarrow c^2 = a \cdot m \Leftrightarrow \overline{AB}^2 = \overline{BC} \cdot \overline{BP}$$

Del mismo modo lo son AQC y BAC, así:

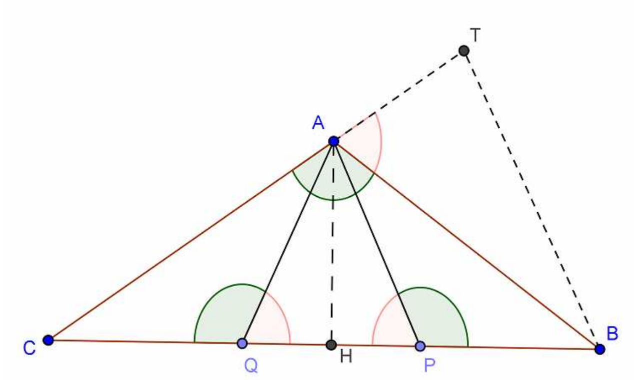


$$\frac{b}{n} = \frac{a}{b} \Rightarrow b^2 = a \cdot n \Leftrightarrow \overline{AC}^2 = \overline{BC} \cdot \overline{CQ}$$

Sumando los dos resultados, se obtiene la expresión buscada. Las imágenes de la demostraciçon anterior se han hecho sobre un ángulo A obtuso, si fuera agudo, como en la imagen siguiente, el proceso es idéntico.



Establezcamos ahora la relación entre ambos teoremas, como antes nos apoyaremos en una imagen del de Thabit ibn Qurra para triángulos obtusángulos:



Según el Teorema II.12:

$$\overline{BC}^2 = \overline{BA}^2 + \overline{AC}^2 + 2 \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AT}$$

y según el de Thabit ibn Qurra:

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC} \cdot \left(\overline{BP} + \overline{CQ}\right)$$

como $\overline{BP} + \overline{CQ} = \overline{BC} - \overline{PQ}$, puede reescribirse:

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC} \cdot \left(\overline{BC} - \overline{PQ}\right)$$

y, por tanto:

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{BC} \cdot \overline{PQ}$$

Así que debemos probar que

$$\overline{PQ} \cdot \overline{BC} = 2 \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AT}$$

La presencia en la fórmula de los segmentos AT y PQ nos llevan a considerar los triángulos BTA y APQ, el primero es rectángulo pero el segundo no, por lo que no pueden aplicarse resultados de semejanza. Pero APQ es isósceles y si se añade H el punto medio de PQ, entonces BTA es semejante a AHP, pues ambos son triángulos rectangulos y

Áng(APH)= Áng (BAT)

Entonces:

$$\frac{\overline{AT}}{\overline{PH}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{AP}}$$

Pero los triángulos ABP y CBA también son semejantes, y en ellos:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{AP}}$$

Por tanto:

$$\frac{\overline{AT}}{\overline{PH}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{AP}}$$

y $2 \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AT} = 2 \cdot \overline{PH} \cdot \overline{BC} = \overline{PQ} \cdot \overline{BC}$

Pues H es el punto medio de PQ.

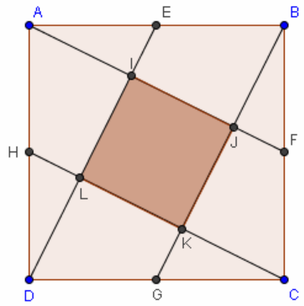
Contraportada

Tres problemas fáciles

1. Tenemos dos cajas cúbicas iguales, de 10 cm. de lado. La primera contiene una esfera de cinco centímetros de radio. La segunda está llena de pequeñas esferas de un centímetro de radio, en total hay $5^3=125$, bien ordenadas en 5 capas de 5 por 5 bolas.
¿En cuál de las dos es mayor el espacio vacío?

2. El mes pasado tuvimos una fecha especial, escrita del modo habitual, el 11 de noviembre de 2.011 fue el 11-11-11. También lo fue el 11 de enero: 11-1-11, y el de febrero: 11-2-11. Y el año que viene, el 2 de enero será el 2-1-12. Escribiendo así las fechas, ¿cuántas fechas capicúa tendrá el 2.012? ¿Habrá en el futuro algún año que no presente fechas capicúas? ¿Cuál será el primero?

3. Mira esta figura. En un cuadrado ABCD de lado 5 cm. señalamos los puntos medios de los lados, y los llamamos E, F, G y H. Los unimos con los vértices de modo que se forma un cuadrado interior IJKL. ¿Cuánto mide su lado?



Tres problemas menos fáciles

1. El triángulo de Pascal puede representare en forma de tabla infinita del siguiente modo:

1	1	1	1	1	…
1	2	3	4	5	…
1	3	6	10	15	…
1	4	10	20	…	
1	5	14	…		
…	…	…			

Demostrar que cualquier determinante formado por filas o columnas consecutivas de la tabla anterior que contenga la primera fila o la primera columna, tiene siempre el mismo valor.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 10 \end{vmatrix} = \ldots$$

2. En un cuadrado mágico 3 por 3 están colocados los números del 1 al 9 de modo que todas las filas, todas las columnas y las dos diagonales suman lo mismo.

Un cuadrado es antimágico si los números aparecen colocados de modo que la suma de cada fila, de cada columna y de ambas diagonales sea un número diferente.

Encontrar un cuadrado de este tipo sería uno de nuestros "Tres problemas fáciles", preguntar cuántos antimágicos hay sería muy difícil –pero puede intentarlo-, lo que le pedimos es que halle tantos cuadrado antimágicos como pueda en los que los números de 1 a 9 siguen el movimiento del rey del ajedrez.

3. Rogamos al amable lector que piense cinco números enteros positivos. Para que sirva de ejemplo, nosotros elegimos los siguientes:

3 14 8 5 20

si le decimos que siempre habrá tres de ellos, en nuestro caso 14, 8 y 20 o 14, 8 y 5 que suman un múltiplo de tres, ¿creerá que estamos en lo cierto?

Recuerde nuestras direcciones:
materranya@yahoo.es
http://www.catedu.es/materranya