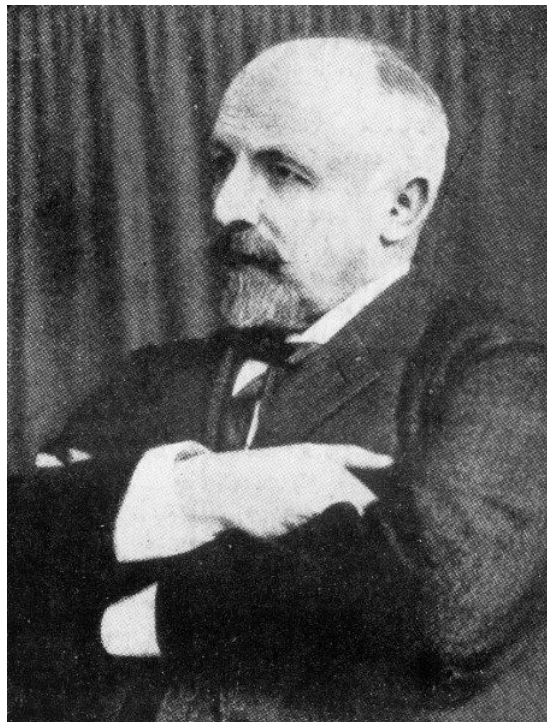




EL REGALO DE CANTOR



Georg Cantor

“En las Matemáticas, el arte de plantear los problemas es más importante que su resolución”. G. Cantor.

“No hay infinito”. H. Poincaré.

“Nadie nos expulsará del paraíso que Cantor ha creado para nosotros”. D. Hilbert.

Es raro que una disciplina de la matemática moderna vaya unida al nombre de una única persona, pero así ocurre con la Teoría de Conjuntos de Cantor, elaborada en el último decenio del siglo XIX por Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (3.3.1845, San Petersburgo - 6.1.1918, Halle).

¿Qué debe entenderse por “conjunto”?; para empezar es suficiente con “unión de objetos cualesquiera, entendida como un todo”. Felix Hausdorff, en 1914, dice: “un conjunto es una reunión de cosas que constituyen una totalidad, es decir, una nueva cosa”, y añade: “esto puede difícilmente ser una definición, pero sirve como demostración expresiva del concepto de conjunto a través de conjuntos sencillos como el conjunto de habitantes de una ciudad o el de átomos de hidrógeno del sol. El mérito de Georg Cantor es haber traído a consideración no sólo conjuntos finitos, sino también infinitos y fundar con ellos una nueva ciencia”.

Un conjunto así definido no tiene que estar compuesto de cosas homogéneas, por ejemplo, es válido como conjunto matemático el siguiente:

$A = \{ \text{“el número 3”}, \text{“el color amarillo”}, \text{“el carbonato de calcio”}, \text{“la palabra “hoja””}, \text{“el olor de las rosas”}, \text{“el Conde Drácula”} \}$

sin importar el orden en que los escribamos, $\{a,b\} = \{b,a\}$.

¿Podemos llamar “conjunto” a aquel que no posee elemento alguno?, matemáticamente conviene hacerlo, es el conjunto vacío; es de observar que sólo existe un conjunto así.

El gran mérito de Cantor fue el hacer consideraciones sistemáticas sobre los conjuntos transfinitos, como él los denominó -concepto inaudito hasta avanzado el siglo XIX- hablar de “potencia” u “orden” de un conjunto como el número de sus elementos y de “conjuntos equivalentes” cuando puede establecerse una biyección¹ entre ellos; ideas ya apuntadas por

¹ Una biyección es una relación entre dos conjuntos A y B que empareja cada elemento de A con uno –sólo uno- de B. De este modo el número de elementos de A y B ha de ser necesariamente el mismo.



Bolzano, que se centró demasiado en el aspecto filosófico.



Pero su más notable logro fue demostrar, con rigor matemático, que no todos los conjuntos infinitos son de igual tamaño. Demostró que los números reales y los racionales son conjuntos infinitos y que el primero es de tamaño estrictamente mayor que el segundo, lo que resultó chocante a la intuición de sus contemporáneos, en palabras de Henri Poincaré: “la teoría de números transfinitos es una enfermedad de la que algún día la matemática llegará a curarse”.



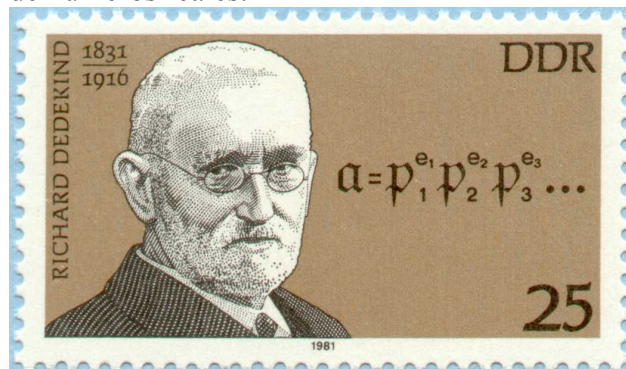
Jules-Henri Poincaré

EL INFINITO, LOS INFINITOS.

Cantor consideraba axiomático que a cada punto de una recta continua le correspondía un número real. Recíprocamente, a cada número

Suplemento del Boletín Materraña

real le correspondía un punto, y sólo uno, de la recta real. Hoy se conoce este resultado como axioma de Cantor-Dedekind. Por tanto, el problema de describir el continuo de los puntos en una recta es equivalente al problema de definir e investigar las propiedades del sistema de números reales.



Las teorías de números reales encuentran su máxima dificultad en números no racionales; desde la antigüedad es conocido que la raíz cuadrada de 2, 3, 5 y otros muchos, es irracional. Cantor, siguiendo una idea de su profesor Karl Weierstrass, propone que todo irracional puede representarse por una sucesión infinita de racionales, es decir, puede ser imaginado como una serie de puntos sobre la recta numérica.

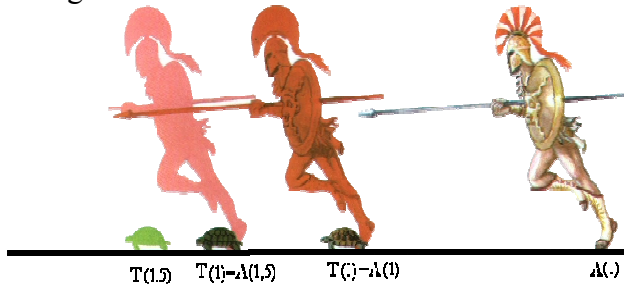
Muchos matemáticos de la época encontraron difícil admitir la existencia de conjuntos formados por infinitos elementos a causa de las paradojas que parecía plantear la noción de infinitud, por ejemplo las de Zenón de Elea (490-430 AdC.). Las más citadas hacen referencia a la imposibilidad del movimiento, y son las siguientes:

La primera es la de dicotomía, afirma que antes de que un móvil pueda recorrer una distancia determinada, ha de recorrer la mitad, pero antes, ha de recorrer la mitad de esa mitad y así sucesivamente una cantidad infinita de subdivisiones. El móvil ha de realizar un número infinito de etapas, sin que ninguna sea la primera, en un tiempo finito, lo que es imposible; como tampoco es posible siquiera el comienzo del movimiento.

La segunda paradoja es la de Aquiles, que en competición en una carrera con una tortuga le da cierta ventaja inicial, por muy veloz que sea Aquiles no podrá alcanzar a la tortuga, pues cuando haya llegado a la posición



inicial de la tortuga, ésta habrá avanzado una distancia, cuando Aquiles haya recorrido esa distancia, la tortuga habrá avanzado un poco más. Este proceso continua indefinidamente y el veloz Aquiles nunca podrá ganar a la lenta tortuga.



Años después, Aristóteles (384-322 AdC.) advertía: “La consideración acerca de la infinitud presenta una dificultad, ya que es imposible definir tanto que existe como que no”.



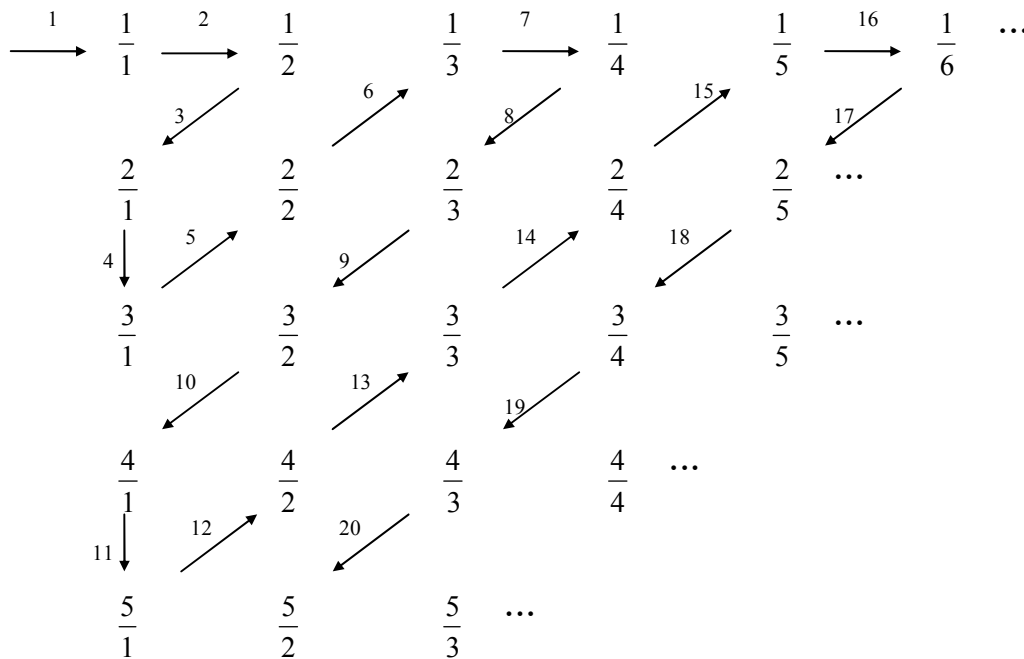
Para Carl Friedrich Gauss, el infinito era una forma de hablar, no una cantidad completa, en propiedad hay que hablar de límites, interpretación dominante desde Aristóteles, de *infinito potencial*, lo que significa que dado un valor de una magnitud, puede pensarse otro mayor de modo que el proceso de crecimiento nunca se detiene, aunque todos los valores se mantienen finitos; es decir, no existe una magnitud que pueda tomar un valor infinitamente grande. Cantor, superando estas ideas, da un gran paso adelante demostrando que es factible concebir el conjunto de todos los

números naturales, y otros, con una cantidad infinita de elementos. Algunos autores, como W.R. Fuchs (ver bibliografía) atribuyen esta demostración a W. R. Dedekind (1831-1916), colaborador de Cantor, cuyos trabajos estaban muy relacionados, dio, en 1872, la primera definición precisa de conjunto infinito: “Se dice que un sistema S es infinito cuando es semejante a una parte propia² del mismo; si no, se dice que el sistema S es finito”. Caía así la idea de Euclides, de que “el todo es mayor que cualquiera de sus partes”, carente de validez en el terreno del infinito. Además exponía: “La recta es infinitamente más rica en puntos individuales que lo es el dominio ... de los números racionales en los números individuales” -conviene leer esta frase un par de veces-. El quid de esta observación es que el conjunto de los racionales, aunque denso³ en el conjunto de los reales, deja sitio suficiente para alojar un número infinito de irracionales mucho “mayor”, es decir, el conjunto de los racionales se halla lleno de huecos, no es continuo. El problema es que Dedekind no dice cuánto más rico en puntos es el continuo de los reales respecto a los racionales que estos sobre los naturales, este paso lo dará Cantor. Partiendo de la prueba hecha por Galileo, considerada como paradójica, de que hay tantos naturales como sólo pares o sólo impares, exhibió, en 1895, un método refinado e ingenioso de emparejar los racionales con los naturales, algo que ya hizo en 1874, pero con una demostración diferente. Llamó numerables a aquellos conjuntos que pueden ponerse en biyección con el conjunto de los naturales, lo que equivale a poderlos contar, de ahí su nombre.

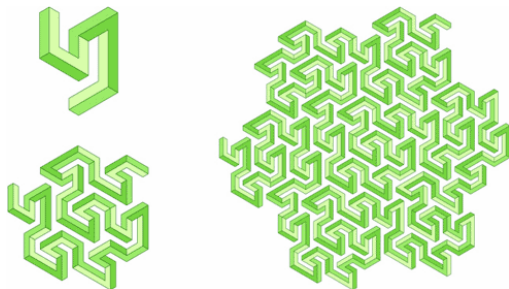
El método es el siguiente: se colocan todas las fracciones, por filas, según su numerador y se van contando (contar es establecer una biyección con los naturales) en diagonal, en el sentido de las flechas, como aparecen en el cuadro 1 -seguro que el lector puede encontrar otros modos de recorrerlo-

² Una parte propia es un subconjunto que no coincide con el total.

³ Un conjunto A es denso en B si para cualquier elemento de B hay alguno de A tan cerca como se desee.



es indudable que aparecen todas las fracciones y que a cada una se le asocia un número natural. Obsérvese que, por ejemplo, entre 1 y 2 hay infinitos números racionales, pese a todo existe tantos racionales como naturales. Resulta contrario a la intuición que el conjunto de números naturales y el de racionales tengan el mismo tamaño, pensando en la densidad de los racionales en la recta real y la “escasez” de naturales.



Un número es algebraico si es solución de una ecuación algebraica con coeficientes enteros y grado natural, n . Para $n=1$, todo racional es algebraico. Por ejemplo a/b es solución de la ecuación $bx=a$. Para $n=2$, algunos irracionales son algebraicos. Que no todo irracional es algebraico fue demostrado por Liouville en 1844, introduciendo los *números de Liouville*, contenidos en los trascendentes (reales no algebraicos). Cantor demostró, en 1874, que el conjunto de todos los números algebraicos -en apariencia mucho mayor que los racionales- también es numerable.

Otra observación interesante que puede hacerse es la siguiente: cada número natural tiene su siguiente, según la definición axiomática de Peano el siguiente del número natural a es $a+1$, pero ¿quién es el “siguiente” de una fracción a/b ?; es sabido que entre dos fracciones a/b y c/d podemos hallar fracciones diferentes a las dadas. Por ejemplo $(a+c)/(b+d)$, el lector no tendrá dificultad en demostrarlo. Así resulta difícil extender la idea de “siguiente” de los naturales a los racionales, pero ¿no acabamos de ordenar las fracciones en el cuadro 1?, pues ya hemos asignado a cada uno su siguiente, lo que ocurre es que sería difícil poner de acuerdo a todo el mundo, lo que no sucede en los naturales.



Giuseppe Peano



En la demostración anterior se han “numerado” las fracciones positivas, ¿le apetece al lector intentar numerarlas todas, positivas y negativas?

El siguiente paso de Cantor fue mucho más impresionante, demostrar que el conjunto de los reales no es numerable, es decir, no se puede establecer una biyección entre los números naturales y los puntos de una recta. La demostración que dio en 1874 es complicada, pero presentamos aquí su idea, bastante refinada con el paso del tiempo, conocida como *método de diagonalización*.

Si el conjunto de los números reales fuese numerable, también lo sería el intervalo abierto $(0,1)$, en tal caso podríamos establecer un emparejamiento, por ejemplo ver cuadro 2:

1	←	→	$x_1 = 0,321543...$
2	←	→	$x_2 = 0,701524...$
3	←	→	$x_3 = 0,031144...$
4	←	→	$x_4 = 0,484846...$

cuadro 2

donde la columna de la derecha contiene todos los números del intervalo $(0,1)$, a partir de aquí construyamos un número x de $(0,1)$ como sigue (ver cuadro 3): si el n -ésimo decimal de x_n es 1, el n -ésimo decimal de x será 0, y será 1 en otro caso, en nuestro ejemplo $x=0,1101...$ Si $(0,1)$ es numerable, hipótesis que estamos haciendo, este x debería ocupar algún puesto en el emparejamiento dado, pero no está porque difiere al menos en una cifra con cada x_i de la lista: de x_p difiere, al menos, en el decimal p -ésimo. La hipótesis de que se pueden numerar (contar) los números reales es, por tanto, falsa.

1	←	→	$x_1 = 0,\underline{3}21543...$
2	←	→	$x_2 = 0,7\underline{0}1524...$
3	←	→	$x_3 = 0,03\underline{1}144...$
4	←	→	$x_4 = 0,484\underline{8}46...$

cuadro 3

Cantor propone a Dedekind en 1874 el problema siguiente: “¿Sería posible poner una superficie, por ejemplo un cuadrado, incluyendo su contorno, en correspondencia con una línea recta, quizás con un intervalo, incluyendo sus extremos, de manera que a cada punto de la

recta le corresponda uno solo de la superficie, y recíprocamente?”. Cantor opinaba que la respuesta debía ser negativa, esto supondría que el plano tiene tantos puntos como una recta, aunque ninguno de los dos conseguía dar la razón de tal creencia. En 1877, Cantor envió a Dedekind la noticia de que no es imposible establecer una correspondencia biunívoca entre una recta y un plano, el resultado, que cogió tan de sorpresa al propio Cantor que exclamó: “¡Lo veo y no lo creo!”, es el siguiente:

Sea el rectángulo $I=[1,0] \times [1,0]$, sea el punto $(x,y) \in I$, los números x e y son fragmentados en grupos de una cifra, excepto el 0, que no da lugar a grupo, por ejemplo

$$\begin{aligned} x = 0,6032001... &\longrightarrow x = 0,6 \mid 03 \mid 2 \mid 001 \mid ... \\ y = 0,430073... &\longrightarrow y = 0,4 \mid 3 \mid 007 \mid 3 \mid ... \end{aligned}$$

los grupos son refundidos en un nuevo número decimal único por el procedimiento de ir tomándolos alternativamente, así

$$(x,y) \longrightarrow 0,6 \mid 4 \mid 03 \mid 3 \mid 2 \mid 007 \mid 001 \mid 3...$$

este número es un punto de $(0,1)$ y el proceso es reversible. ¿Podría el lector determinar en qué puntos del segmento $[1,0]$ se transforma la frontera de $I=[1,0] \times [1,0]$? ¿Qué ocurriría si los ceros no tuvieran ese trato especial?



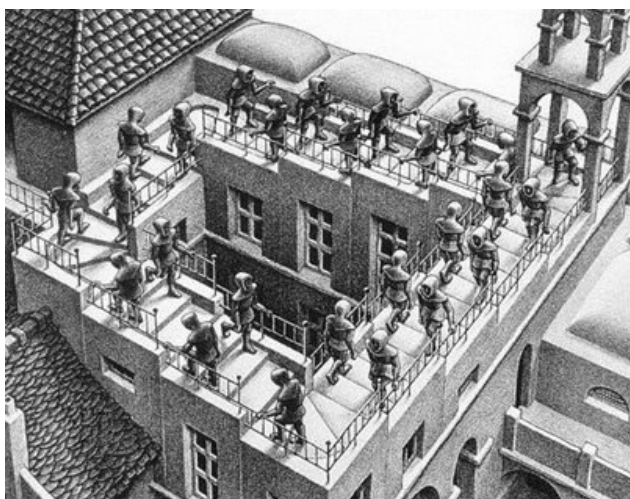
Richard Dedekind

Se demuestra así que no es la dimensión del conjunto lo que determina su potencia, sino que es un asunto de densidad. En este momento tal vez le apetezca al lector establecer una



biyección entre el conjunto de los números reales que van de 3 a 7, ambos inclusive, y el conjunto de los números reales entre 1 y 11, incluidos o sin incluir. Puede pensarse en la expresión analítica de tal biyección, pero una aplicación del Teorema de Thales da una bonita demostración de la existencia -sólo- de tal biyección.

En realidad Cantor demostró que el número de puntos de $\mathbb{R}^n$ es equivalente al número de puntos de la recta. A partir de los resultados anteriores Cantor, al estudiar la teoría de conjuntos infinitos, descubrió conjuntos cuyos cardinales eran infinitos, pero distintos, y que dado uno de tales cardinales, siempre existe uno mayor.



CARDINALES Y ORDINALES.

Fue a partir de la definición de los irracionales como límite de una sucesión de racionales como Cantor introdujo los transfinitos, lo hizo de la siguiente forma: en 1872 introdujo la noción de punto de acumulación (un punto es de acumulación en un conjunto si el conjunto tiene siempre una infinidad de puntos arbitrariamente próximos al punto). Dado un conjunto cualquiera P , Cantor definía el conjunto derivado de P , P^1 , como el conjunto de puntos de acumulación de P , si P^1 es infinito, puede construirse P^2 el conjunto de puntos de acumulación de P^1 , análogamente P^3 , y así sucesivamente. Demostró que $P^1 \supset P^2 \supset P^3 \supset \dots$ Cantor argumentó que puede que se llegue a un n , número natural, tal que P^n sea finito; pero puede que no. Entonces puede

considerarse el conjunto de puntos comunes a $P^1, P^2, P^3, \dots, P^n, \dots$ al que designó P^∞ ; a partir de 1880 comenzó a referirse al superíndice ∞ como símbolo transfinito. Si P^∞ tiene infinitos puntos -o elementos-, puede formarse el conjunto derivado $P^{\infty+1}$ y también $P^{\infty+2}$ y siguientes. En 1883 presentó $\infty, \infty+1, \infty+2, \dots$ como números de un nuevo tipo, los transfinitos, a modo de extensión autónoma y sistemática de los números naturales. La razón estaba en que eran necesarios para seguir avanzando en la teoría de conjuntos y el estudio de los reales.

En la actualidad los transfinitos se denotan con la primera letra del alfabeto hebreo, aleph: $\aleph_0, \aleph_1, \dots$ y designan el número de elementos de los conjuntos infinitos; son vistos, por tanto, como números cardinales. Esta notación fue introducida por el propio Cantor, que consideraba los alfabetos griego y latino ya demasiado utilizados en matemáticas. Tiene interés histórico que los primeros transfinitos introducidos por Cantor fueran ordinales -definidos por el orden o posición en una lista-.

En un conjunto finito su número cardinal -número de elementos- y su número ordinal -admitamos que un conjunto de n elementos ocuparía la posición n en una lista de conjuntos- coinciden, Cantor descubrió que esta propiedad los identifica, es decir, que en conjuntos infinitos el número cardinal y el número ordinal no coinciden, el razonamiento, tomado de J.W. Dauben (ver bibliografía), es un poco farragoso, pero merece la pena.



Podemos asociar el número 1 al conjunto $\{1\}$, el 2 al conjunto $\{1,2\}$, el 3 al conjunto $\{1,2,3\}$ etc., -estamos asociando números ordinales con números cardinales- Cantor vio que los ordinales $\{1,2,3, \dots\}$ se basan en añadir elementos de uno en uno a los cardinales (añadir



el elemento “2” al conjunto $\{1\}$, el “3” al $\{1,2\}$, ...). No hay ordinal máximo, ya que siempre se puede añadir un elemento más al conjunto, pero así como un irracional, por ejemplo raíz cuadrada de 2, puede obtenerse como límite de racionales, es lícito, según Cantor, definir un nuevo ordinal transfinito $\aleph$ como el primero siguiente a los ordinales “ordinarios” 1,2,3...

Podemos resumir así:

$$\begin{aligned} 1 &\longleftrightarrow \{1\} \\ 2 &\longleftrightarrow \{1,2\} \\ 3 &\longleftrightarrow \{1,2,3\} \\ &\dots \\ \aleph &\longleftrightarrow \{1,2,3,\dots\} = \{2,4,6,\dots\} = \\ &\quad = \{1,3,5,\dots\} = \{2,3,4,\dots\} \end{aligned}$$

Recordemos que estamos emparejando ordinales con cardinales, y, como se ha dicho, Galileo ya había demostrado que los cardinales de $\{1,2,3,\dots\}$, $\{2,4,6,\dots\}$, $\{1,3,5,\dots\}$, $\{2,3,4,\dots\}$, y tantos otros, coinciden.

Pero podemos seguir añadiendo elementos, uno a uno, al final, de modo que

$$\begin{aligned} \aleph &\longleftrightarrow \{1,2,3,\dots\} \text{ entonces } \aleph+1 \longleftrightarrow \{1,2,3,\dots,1\} \\ \aleph &\longleftrightarrow \{3,4,5,\dots\} \text{ entonces } \aleph+1 \longleftrightarrow \{3,4,5,\dots,1\} \\ \aleph &\longleftrightarrow \{3,4,5,\dots\} \text{ entonces } \aleph+2 \longleftrightarrow \{3,4,5,\dots,1,2\} \end{aligned}$$

¿Cómo distinguir $\aleph$ de $\aleph+1$? pues por el orden de sus elementos, es decir, por dónde se encuentra la “laguna infinita”, así

$$\begin{aligned} \{10,20,30,\dots,1\} &\longleftrightarrow \aleph+1; \\ \{10,30,40,\dots,20\} &\longleftrightarrow \aleph+1; \\ \{30,40,50,\dots,10,20\} &\longleftrightarrow \aleph+2 \end{aligned}$$

Obsérvese que, por ejemplo:

$$1+\aleph \longleftrightarrow \{1,2,4,6,\dots\}$$

y por tanto $1+\aleph=\aleph$; además, tal vez sorprendentemente, $1+\aleph \neq \aleph+1$.

Puesto que $\aleph+1$, $\aleph+2$, $\aleph+3$,... carecen de elemento máximo, podemos imaginar otro ordinal $2\aleph=\aleph+\aleph$

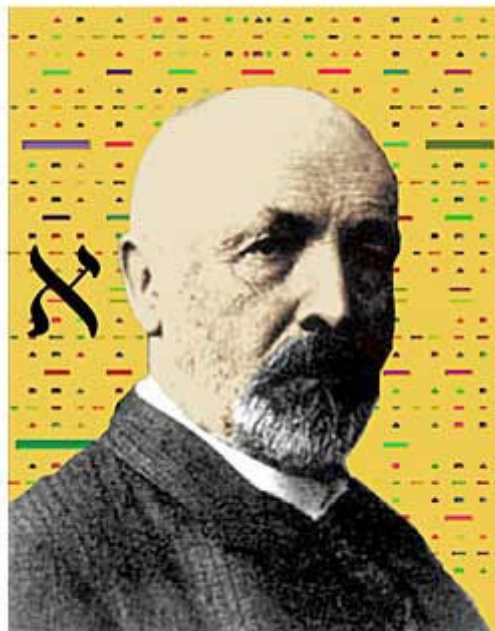
$$2\aleph \longleftrightarrow \{2,4,6,\dots, 1,3,5,\dots\}$$

y luego $2\aleph+1$, $2\aleph+2$, $2\aleph+3$,... $3\aleph$,..., $\aleph^2=\aleph\aleph$,..., $\aleph^\omega$, ...

Esta representación mediante “lagunas” no facilita la comprensión de cómo será el producto de estos ordinales, ni para demostrar la no conmutatividad del producto.

A modo de resumen digamos que se ha conseguido “crear” números ordinales transfinitos (deduciendo cada uno del precedente añadiendo una unidad), determinando su orden dando la posición que ocupan en una lista (cuando se tiene una sucesión de ordinales transfinitos que carece de elemento último, por ejemplo $\aleph$, $\aleph+1$, $\aleph+2$, ... se define un nuevo ordinal transfinito mayor que los anteriores, $2\aleph$, y luego $3\aleph$, $\aleph^2$, $\aleph^3$,..., $\aleph^\omega$, ...).

Obsérvese que todos los conjuntos tienen igual número de elementos, es decir, igual cardinal, $\aleph_0$, por tanto pueden ponerse en correspondencia biunívoca con los números naturales, pero sus ordinales son distintos. Para conjuntos infinitos los conceptos de número ordinal y número cardinal son fundamentalmente distintos, por tanto todo razonamiento que analice un número asociado a un conjunto infinito ha de distinguir si es un ordinal o un cardinal para evitar ambigüedades. Como en conjuntos finitos la distinción entre números cardinales y ordinales es muy difusa, no es legítimo extender las propiedades bien definidas de conjuntos finitos a infinitos, lo que, de hacerse, conduce a paradojas.



Georg Cantor

A continuación pasó Cantor a describir las propiedades aritméticas de estos ordinales transfinitos, aquí también se distinguen de los finitos. En números finitos $a+b=b+a$ para



cualesquiera a y b , pero no ocurre así en transfinitos, ya se ha visto más arriba que

$$1+\aleph \neq \aleph +1.$$

¿Qué número cardinal debe asignarse al continuo de los números reales? Tomemos el conjunto de los números naturales finitos, su cardinal, o “potencia” en la antigua terminología de Cantor, $\aleph_0$, es mayor que cualquiera de sus elementos, Cantor pasó a considerar el conjunto de todos los ordinales transfinitos correspondientes a todos los conjuntos numerables infinitos; resulta que su cardinal es estrictamente mayor que $\aleph_0$, aunque no logró demostrarlo, Cantor estaba seguro de que este era la potencia del continuo -cardinal de los números reales-. Esta aritmética sobre ordinales y cardinales fue desarrollada entre 1879 y 1884 y completada en dos memorias publicadas en 1895 y 1897, respectivamente, en los *Mathematische Annalen*.

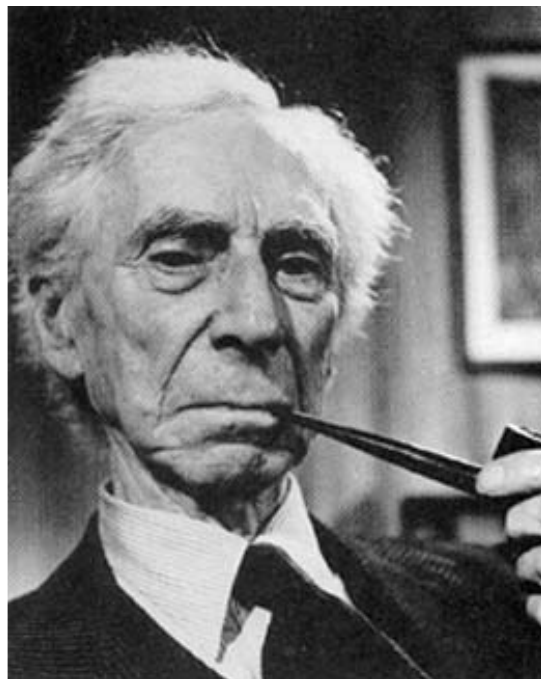


Tal conjetura -la hipótesis del continuo de Cantor- jamás ha sido demostrada. En 1963, P. Cohen, construyendo sobre una obra de K. Gödel, demostró que aunque es coherente con los axiomas de la teoría de conjuntos, es también independiente de ellos, como ocurre en Geometría con el postulado euclídeo de las paralelas, se pueden construir versiones de la Teoría de Conjuntos distintas según se admita como verdadera o falsa la hipótesis del continuo, es decir, no debe admitirse necesariamente.

Quedaba en la teoría de conjuntos transfinitos determinar la naturaleza y el status de los cardinales transfinitos -últimos en ser definidos rigurosamente y en recibir una

notación especial-, si adoptó el símbolo $\aleph$ para los ordinales transfinitos, denotó $\aleph^*$ el primer número cardinal transfinito. Cantor no se decidió por la notación de los alephs hasta 1893, llamó $\aleph_0$ al número que hasta entonces había llamado $\aleph^*$, -cardinal de los naturales- y $\aleph_1$ al siguiente infinito, -cardinal de los reales-.

Cantor demostró que el número cardinal de cualquier conjunto es siempre menor que el número cardinal del conjunto formado por todos sus subconjuntos, y, de modo análogo a los conjuntos finitos donde cardinal de las partes de un conjunto es 2 elevado al cardinal del conjunto, es decir, $\text{Card}(\mathcal{P}(A))=2^{\text{Card}(A)}$, escribió que el cardinal del continuo $\aleph_1$ es igual a un número cardinal que designó $2^{\aleph_0}$. Al demostrar que $\text{Card}(\mathcal{P}(A))>\text{Card}(A)$ -obsérvese el mayor estricto-, Cantor demostró que hay infinitos números transfinitos mayores que $\aleph_1$, por tanto el cardinal del conjunto de todos los subconjuntos de los números reales, $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, Partes de los Reales, será un tercer transfinito, y $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{R}))$ otro mayor. Lo mismo que hay infinitos números naturales, hay infinitos transfinitos.



Bertrand Russell

Los razonamientos de Cantor sobre el cardinal del conjunto de subconjuntos de uno dado condujeron a muy diferentes conclusiones. En 1903, Bertrand Russell mostró que al



considerar la colección de todos los conjuntos que no son elementos de sí mismos se planteaba en teoría de conjuntos una paradoja, “El conjunto de todos los conjuntos que no se contienen a sí mismos como elemento, ¿se contiene a sí mismo como elemento o no?”. Tanto afirmar como negar en la respuesta da lugar a contradicción. Existe una divertida historieta que expresa esta contradicción, es la del barbero de un pequeño pueblo en el que cada hombre o se afeita a sí mismo o (excluyente) es afeitado por el barbero, ¿quién afeita al barbero?. Analizada la paradoja de Russell hacía pensar que la definición de conjunto que daba Cantor adolecía de algo esencialmente erróneo, mas ningún resultado importante alcanzado por Cantor en matemática transfinita ha quedado invalidado por desarrollos posteriores.

La vida de Cantor no fue fácil, además de las críticas a su trabajo, es sabido que padeció durante toda su vida una serie de colapsos nerviosos, síntomas de una enfermedad mental, agotadores y en aumento con el tiempo. Estudios recientes sugieren que era víctima de psicosis maníaco-depresiva.



Leopold Kronecker

Al principio se resistió a aceptar la existencia de los números transfinitos, pero superó tal prejuicio, estas dudas iniciales le hicieron prever la oposición que iba a encontrar en diversos campos, por ello intentó presentarlos no sólo con razonamientos matemáticos sino también filosóficos y teológicos.

Es posible que su enfermedad mental pudiera haberle proporcionado, en sus fases maníacas, la energía y tenacidad obsesiva con que promovió su teoría. Según escribió a la matemática inglesa Grace Chisholm Young en 1908: “... En mi largo aislamiento, ni las matemáticas ni más en particular la Teoría de Números han dormido o estado en barbecho en mi interior”.

Los infructuosos esfuerzos de Cantor para demostrar la hipótesis del continuo le provocaron no poca ansiedad y fatiga mental; a primeros de 1884 creyó tener una demostración que desechó después, esto y los duros ataques de Kronecker que seguía sufriendo parecen ser la causa de que en mayo de ese año sufriera el primer colapso nervioso grave, la enfermedad se impuso con gran rapidez y durante un mes sólo se reconocía la fase maníaca de su mal, cuando en junio pasó a la fase depresiva se reconoció incapaz de acometer de nuevo su tarea matemática, contentándose con realizar tareas administrativas en la Universidad de Halle. Abandonó totalmente la investigación matemática, comenzó a estudiar historia y literatura inglesa, especialmente la personalidad de W. Shakespeare, filosofía y teología, acercándose de nuevo desde este enfoque al infinito, creyó que los números transfinitos le habían llegado como mensaje divino. Quiso que sus opiniones fuesen examinadas por teólogos y reconciliar su concepto de infinito matemático con la doctrina de la Iglesia.

Cantor volvió a las matemáticas, el resultado $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$ es de esa época. Al proseguir sus investigaciones detectó que en su teoría se podían producir antinomias -proposiciones contradictorias- que sembraron la duda sobre la validez de su teoría, las reconoció y describió, pero no pudo evitarlas. Era 1897, y a partir de entonces no publicó trabajo alguno. Sufrió graves crisis cada vez más frecuentes y largas hasta que falleció de un paro cardíaco en 1918. Tanto la teoría de conjuntos como la aritmética de los cardinales y ordinales despertaron el asombro de un gran número de contemporáneos, por la naturaleza de sus ideas revolucionarias. Unos se opusieron; a los ya mencionados Kronecker y Poincaré cabe añadir a Felix Klein



y Hermann Weyl. Por el contrario otros se sintieron vívidamente impresionados por el uso que ya se había hecho de aquellas teorías, como Adolf Hurwitz, Jacques Hadamard, David Hilbert y Bertrand Russell.

$$\aleph_{\alpha}^{\aleph_{\beta}} = \begin{cases} \aleph_{\alpha} & \aleph_{\beta} < \aleph_{\alpha} \\ \aleph_{\beta+1} & \aleph_{\beta} \geq \aleph_{\alpha} \end{cases}$$

Otros matemáticos reconocieron la importancia de la teoría de conjuntos, a la que se dedicaron varios congresos, y las puertas que abrió en otras ramas, por ejemplo el sueco Mittag-Leffler la aplicó a la demostración de teoremas de Teoría de Funciones. Además publicó trabajos originales de Cantor en la revista que él mismo editaba, a través de la que muchos matemáticos, principalmente franceses e ingleses, prestaron atención a los trabajos de Cantor. Otra de estas ramas fue la Topología, que había sido presentada anteriormente por Leibniz con el nombre de *geometría de situación*, y a la que están ligados problemas célebres como el de los puentes de Königsberg,

el de los nudos y el del coloreado de un mapa geográfico; pero que empieza a verse como una disciplina independiente con los trabajos de Cayley, Listing y Möbius aunque fue Riemann quien fundó verdaderamente la Topología, a la que consideró como el estudio de las propiedades invariantes bajo el efecto de transformaciones biunívocas continuas, en su desarrollo posterior aparece la influencia de la Teoría de Conjuntos y la Teoría de Números Reales de Dedekind y de Bolzano, así como del estudio de funciones de variable real. La Teoría de Conjuntos condujo en las matemáticas a un posterior proceso de abstracción que sentaría las condiciones previas para las modernas teorías de estructuras; lo que condujo a la Lógica Matemática y fue determinante para el actual desarrollo de la matemática y la aplicación de esta en otras muchas ciencias.

Muchos matemáticos han trabajado en la superación de las mencionadas antinomias, por ejemplo E. Zermelo y A. Fraenkel, quienes para ello axiomatizaron la teoría de conjuntos, el ya citado B. Russell y L. Brouwer.

Bibliografía:

Bell, E. T.: *Men of mathematics*. Nueva York: Simon and Schuster, 1937.

Boyer, C. B.: *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza Universidad, 1987.

Collette, J. P.: *Historia de las Matemáticas*. Madrid: Siglo XXI, 1985.

Dawben, J. W.: "Georg Cantor y la Teoría de conjuntos transfinitos" en: *Investigación y Ciencia*, nº 83, agosto. Barcelona: Prensa Científica, 1983.

Fruchs, W. R.: *El libro de la matemática moderna*. Barcelona: Omega, 1969.

Wussing, H., Arnold, W.: *Biografía de grandes matemáticos*. Zaragoza: P.U.Z., 1989.

